# 高中二年级学情检测

## 数学试题参考答案

一、单项选择：1-4　CBDC　5-8．DAC B

二、多项选择：9．BD　10．AC　11．BCD　12．ACD

三、填空题：13．$\frac{2}{9}$　14．$-4$　15．30　16．2

四、解答题

17．【解析】

(1)因为 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$，

所以 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$．

由题意可得，$\begin{cases}3a+2b+c=0\\8a+4b+2c+1=3\\c=-1\end{cases}$

解得，$a=1,b=-1,c=-1$．

经检验，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ 在 $x=1$ 处有极值；

即 $f(x)=x^3-x^2-x+1$．

(2)因为 $f'(x)=3x^2-2x-1$．

所以 $f'(-1)=4$，

因为切线过 $(-1,0)$，

所以 $y=4(x+1)$

即所求切线方程为 $4x-y+4=0$．

18．【解析】

（1）由题意可知：

| 疗法 | 疗效 | | 合计 |
|---|---|---|---|
| | 未治愈 | 治愈 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 外科疗法 | 20 | 20 | 40 |
| 化学疗法 | 42 | 18 | 60 |
| 合计 | 62 | 38 | 100 |

(2)解：零假设为$H_0$：是否治愈与治疗方法无关联.

根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2=\frac{100\times(20\times18-20\times42)^2}{40\times60\times62\times38}\approx4.075>3.841=x_{0.05}$$

根据小概率值$\alpha=0.05$的独立性检验，我们能推断$H_0$不成立，即认为是否治愈与治疗方法有关联，此推断犯错误的概率不大于0．05.

19.【解析】

（1）设A="抽奖者获奖"，则由古典概型可得

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}.$$

（2）(法I)

由题意$X\sim B(3,\frac{3}{10})$，

$$P(X=k)=C_3^k(\frac{3}{10})^k(1-\frac{3}{10})^{3-k},k=0,1,2,3.$$

$$E(X)=3\times\frac{3}{10}=\frac{9}{10}.$$

(法II)

由题意可知，随机变量$X$的可能取值为0,1,2,3

$$P(X=0)=C_3^0(\frac{3}{10})^0(1-\frac{3}{10})^3=0.343,$$

$$P(X=1)=C_3^1(\frac{3}{10})^1(1-\frac{3}{10})^2=0.441,$$

$$P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{10})^2(1-\frac{3}{10})^1=0.189,$$

$$P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{10})^3(1-\frac{3}{10})^0=0.027.$$

于是$X$的分布列如下：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.343 | 0.441 | 0.189 | 0.027 |

$E(X)=3\times\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$.

20.【解析】

(1)当$a=2$时，由$f'(x)=2e^x(x-\frac{1}{2})(x-1)$，

令$f'(x)>0$,得$f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{2})$和$(1,+\infty)$上分别单调递增；令$f'(x)<0$,得$\frac{1}{2}<x<1$，则$f(x)$在$(\frac{1}{2},1)$上单调递减；$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的情况如下：

| $x$ | $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ | $\frac{1}{2}$ | $\left(\frac{1}{2},1\right)$ | 1 | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $5\sqrt{e}$ | ↘ | 3e | |

所以$x=\frac{1}{2}$时$f(x)$取得极大值$5\sqrt{e}$，$x=1$时$f(x)$取得极小值$3e$.

(2)$f'(x)=e^x(ax-1)(x-1)$

（ⅰ）当$a=0$时，由$f'(x)=e^x(1-x)$，得$x<1$时，$f'(x)>0$；$x>1$时，$f'(x)<0$

则$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减；

（ⅱ）当$a<0$时，由$f'(x)=ae^x(x-\frac{1}{a})(x-1)$，易知$\frac{1}{a}<1$，

令$f'(x)<0$，得$x<\frac{1}{a}$或$x>1$，则$f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{a})$和$(1,+\infty)$上分别单调递减；

令$f'(x)>0$,得$\frac{1}{a}<x<1$，则$f(x)$在$(\frac{1}{a},1)$上单调递增；

（ⅲ）当$0<a<1$时，由$f'(x)=ae^x(x-\frac{1}{a})(x-1)$，易知$\frac{1}{a}>1$，

令$f'(x)<0$,得$1<x<\frac{1}{a}$，则$f(x)$在$(1,\frac{1}{a})$上单调递减；

令$f'(x)>0$,得$x>\frac{1}{a}$或$x<1$，则$f(x)$在$(-\infty,1)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$上分别单调递增；

综上所述：

当$a<0$时，$f(x)$在$(-\infty,\frac{1}{a})$和$(1,+\infty)$上分别单调递减；在$(\frac{1}{a},1)$上单调递增；

当$a=0$时，$f(x)$在$(-\infty,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减；

当$0<a<1$时，$f(x)$在$(1,\frac{1}{a})$上单调递减；在$(-\infty,1)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$上分别单调递增.

21.【解析】

（1）设事件$B_1$="第 11 题得 0 分"，$B_2$="第 11 题得 2 分"，$B_3$="第 11 题得 5 分"，

$A_1$="第 12 题得 2 分"，$A_2$="第 12 题得 0 分"

所以$P(B_1)=0.1$，$P(B_2)=0.5$，$P(B_3)=0.4$，$P(A_1)=0.7$，$P(A_2)=0.3$

由题意可知$X$的可能取值为$0,2,4,5,7$

$P(X=0)=P(B_1A_1)=P(B_1)P(A_1)=0.1\times0.3=0.03$

$P(X=2)=P(B_1A_2+B_2A_1)=P(B_1)P(A_2)+P(B_2)P(A_1)=0.1\times0.7+0.5\times0.3=0.22$

$P(X=4)=P(B_2A_2)=P(B_2)P(A_2)=0.5\times0.7=0.35$

$P(X=5)=P(B_3A_1)=P(B_3)P(A_1)=0.4\times0.3=0.12$

$P(X=7)=P(B_3A_2)=P(B_3)P(A_2)=0.4\times0.7=0.28$

（每个概率值 1 分，写对其中 4 个得 4 分，少于 4 个没少一个减 1 分）

所以小明第 11 题 12 题总得分$X$的分布列为：

| $X$ | 0 | 2 | 4 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.03 | 0.22 | 0.35 | 0.12 | 0.28 |

（2）

（法 I）设随机变量$Y$为小明第 11 题采用策略 B 的得分，

$Z_1$为小明第 12 题采用策略 A 的得分，$Z_2$为第 12 题采用策略 B 的得分

易知三个随机变量的分布列及其均值依次为：

| $Y$ | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.5 | 0.4 |

所以$E(Y)=3$

| $Z_1$ | 0 | 2 |
|---|---|---|

答案第4页，共7页

| | | |
|---|---|---|
| $P$ | 0.3 | 0.7 |

所以 $E(Z_1)=1.4$

| $Z_2$ | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.6 | 0.3 |

所以 $E(Z_2)=2.7$

若采用方案 1，两题总得分均值为 $3+1.4=4.4$

若采用方案 2，两题总得分均值为 $3+2.7=5.7$，但因时间超过 10 分钟，后面的题得分少 2 分，相当于得分均值为 $3.7$ 分

因为 $4.4>3.7$，所以我赞成小明的方案1

（法 II）

由第（1）可知，小明采用方案 1 时，11 题 12 题总得分的均值为

$E(X)=0\times0.03+2\times0.22+4\times0.35+5\times0.12+7\times0.28=4.4$

设随机变量 $Y$ 为小明采用方案 2 时 11 题 12 题总得分，

$Y$ 的可能取值为 $0,2,4,5,7,10$

可得：

$P(Y=0)=0.1\times0.1=0.01$

$P(Y=2)=0.1\times0.6+0.5\times0.1=0.11$

$P(Y=4)=0.5\times0.6=0.3$

$P(Y=5)=0.1\times0.3+0.4\times0.1=0.07$

$P(Y=7)=0.5\times0.3+0.4\times0.6=0.39$

$P(Y=10)=0.4\times0.3=0.12$

所以随机变量 $Y$ 的分布列为

| $Y$ | 0 | 2 | 4 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.01 | 0.11 | 0.3 | 0.07 | 0.39 | 0.12 |

可得 $E(Y)=0\times0.01+2\times0.11+4\times0.3+5\times0.07+7\times0.39+10\times0.12=5.7$

但因时间超过 10 分钟，后面的题得分少 2 分，相当于得分均值为 $3.7$ 分

因为 $5.7-2=3.7<4.4$，

所以我赞成小明的方案 1

（法 III）

分析题意可知：如果第 12 题采用策略 B 将比采用策略 A 平均多得：

$(-2)\times0.1+5\times0.3=1.3$分

即：仅考虑 11 题与 12 题总得分，方案 2 比方案 1 多$1.3$分，

但因为两题做题时间超过 10 分钟，后面的题少得 2 分，

因为$1.3<2$，

所以我赞成小明的方案 1

22．【解析】

解：(1)（法 I）

因为$\ln x-ax+1\leqslant0$ $(x>0)$恒成立，

所以$a\geqslant\dfrac{\ln x+1}{x}$恒成立.

设$g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}(x>0)$，

所以$g'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$.

令$g'(x)>0$，解得$x\in(0,1)$，令$g'(x)<0$，解得$x\in(1,+\infty)$，

所以$g(x)$在$(0,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递减；

所以$g(x)$在$x=1$处取得最大值$g(1)=1$

所以$a\geqslant1$.

（法 II）

由题意可知：$f'(x)=\dfrac{1}{x}-a(x>0)$

（i）当$a\leq0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，$f(x)\leqslant0$不恒成立；

（ii）当$a>0$时，

令$f'(x)>0$，得$0<x<\dfrac{1}{a}$，则$f(x)$在$(0,\dfrac{1}{a})$单调递增；

令$f'(x)<0$，得$x>\dfrac{1}{a}$，则$f(x)$在$(\dfrac{1}{a},+\infty)$单调递减.

所以$f(x)$在$x=\dfrac{1}{a}$处取得最大值$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a$.

要使$f(x)\leq0$恒成立，只需$f(\dfrac{1}{a})=-\ln a\leq0$，解得$a\geq1$.

综上，$a \geqslant 1$.

（2）由（1）知当$a=1$时，$\ln x \leqslant x-1$

令$x=1+\frac{1}{n},(n \in N_+)$

得$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(\frac{n+1}{n})=\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$.

累加得：$\ln(n+1)-\ln n+\ln n-\ln(n-1)+\cdots+\ln 2-\ln 1<\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1$，

即$\ln(n+1)<\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}+1$.

又因为$\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，

所以$n\ln(1+\frac{1}{n})<1$，即$\ln(1+\frac{1}{n})^n<1$，所以$(1+\frac{1}{n})^n<e$.

综上：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+e>\ln(n+1)+(1+\frac{1}{n})^n$.