苏州市 2022－2023 学年第二学期学业质量阳光指标调研卷
高二数学

2023.6.26

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 M,N 是全集 U 的非空子集, 且 $N\subseteq \complement_U M$, 则 ( )

A. $N\subseteq M$　　B. $M\subseteq \complement_U N$　　C. $C_UM=C_UN$　　D. $M\subseteq N$

【答案】B

2. 已知 $a,b\in R$, 则"$\log_2 a>\log_2 b$"是"$2^a>2^b$"的 ( )

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

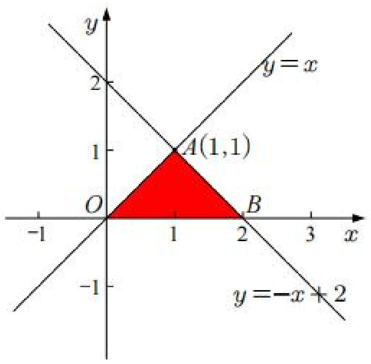
【答案】A

3. 曲线 $y=e^{-x}+1$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与直线 $y=0$ 和 $y=x$ 围成的三角形的面积为 ( )

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. 2

【答案】C

【解析】$y'=-e^{-x}$, 当 $x=0$ 时, $y'=-1$, 即曲线在点 $(0,2)$ 处的切线斜率为 -1, 所以切线方程为 $y=-x+2$,
如图, $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$, 故选 C



4. 为全面贯彻党的教育方针, 落实立德树人的根本任务, 着力造就拔尖创新人才, 某校为数学兴趣小组购买了一些数学特色专著:《数学的意义》《现代世界中的数学》《数学问题》, 其数量分别为 x,y,z(单位: 本). 现了解到: ① $x>y>z>0$; ② $4z>x+y$, 则这些数学专著至少有 ( )

A. 9 本　　B. 10 本　　C. 11 本　　D. 12 本

【答案】A

【解析】因为 $z\geqslant 1$, 当 $z=1, y\geqslant 2, x\geqslant 3$, $x+y\geqslant 5$, 而 $4z=4$, 不成立;
若 $z=2, y\geqslant 3, x\geqslant 4, 4z=8$, 此时 x 取最小 4, y 取最小 3 符合要求, 所以 $x+y+z\geqslant 2+3+4=9$
故选 A

5. 已知定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 从 x 到 $x+\Delta x$ 的平均变化率为 $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}$, 则 $f(x)$ 的单调增区间是 ( )

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

【答案】C

【解析】由导数的定义可知:$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2+x\cdot\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}=$

$\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}-1}{x^2}=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x^2}(x>0)$

由$f'(x)>0\Rightarrow\sqrt{x}-1>0\Rightarrow x>1$，所以$f(x)$的单调增区间为$(1,+\infty)$，故选C

6. 云计算是信息技术发展的集中体现，近年来，我国云计算市场持续增长. 已知某科技公司2018年至2022年云计算市场规模y(单位:千万元)与年份代码x的关系可以用模型$y=ae^{bx}$(其中$e=2.71828\cdots$)拟合，设$z=\ln y$，得到数据统计如下表：（　　）

年份	2018年	2019年	2020年	2021年	2022年
x	1	2	3	4	5
y	m	11	20	36.6	54.6
z	n	2.4	3	3.6	4

已知回归方程$\hat{z}=0.52x+1.44$，则m的值约为（　　）

A. 1.96　　B. 2　　C. 6.9　　D. 7.4

【答案】D

【解析】$\hat{z}=\ln y=bx+\ln a=0.52x+1.44$，所以$b=0.52$，$\ln a=1.44\Rightarrow a=e^{1.44}$

当$x=1$时，$m=e^{1.44}\cdot e^{0.52\times1}=e^{1.96}\approx e^2\approx 7.4$，故选D

7. 已知A,B为某随机试验的两个事件，$\overline{A}$为事件A的对立事件. 若$P(A)=\dfrac{2}{3}$，$P(B)=\dfrac{5}{8}$，$P(AB)=\dfrac{1}{2}$，则$P(B|\overline{A})=$（　　）

A. $\dfrac{3}{8}$　　B. $\dfrac{5}{8}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

【答案】A

【解析】因为$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)\Rightarrow\dfrac{5}{8}=\dfrac{1}{2}+P(\overline{A}B)\Rightarrow P(\overline{A}B)=\dfrac{1}{8}$，

所以$P(B|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{\frac{1}{8}}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{8}$，故选A

8. 已知实数a,b,c满足$a=1.1^{10}$，$5^b=3^a+4^a$，$c=e^a-a$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【答案】B

【解析】因为$c-a=e^a-2a\geqslant ea-2a=(e-2)a>0$，所以$c>a$

由$5^b=3^a+4^a\Rightarrow\dfrac{5^b}{5^a}=\dfrac{3^a}{5^a}+\dfrac{4^a}{5^a}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^a+\left(\dfrac{4}{5}\right)^a$，因为$f(x)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x$在R上递减，

而$a=1.1^{10}=(1+0.1)^{10}=C_{10}^0(0.1)^0+C_{10}^1(0.1)^1+C_{10}^2(0.1)^2+\cdots+C_{10}^{10}(0.1)^{10}>C_{10}^0(0.1)^0+C_{10}^1(0.1)^1=2$

所以$f(a)<f(2)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=1$，即$\dfrac{5^b}{5^a}<1\Rightarrow 5^b<5^a\Rightarrow b<a$

综上$b<a<c$，故选B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B\left(8,\frac{1}{2}\right)$，则 ( )

A. $E(X)=4$ B. $D(X)=3$

C. $P(X=2)=\frac{7}{32}$ D. $P(X=3)=P(X=5)$

【答案】AD

【解析】对于 A，$E(X)=8\times\frac{1}{2}=4$，A 正确；

对于 B，$D(X)=8\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=2$，B 错误；

对于 C，$P(X=2)=C_8^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^6=\frac{7}{64}$，C 错误；

对于 D，$P(X=3)=C_8^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$，$P(X=5)=C_8^5\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$，因为 $C_8^3=C_8^5$，所以 $P(X=3)=P(X=5)$，D 正确.

故选 AD

10. 已知函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ 的定义域均为 R，则下列结论正确的有 ( )

A. 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)+2f(-x)$ 为偶函数 B. 若 $f(x)+2f(-x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 为奇函数

C. 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数 D. 若 $f'(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 为偶函数

【答案】BC

【解析】对于 A，令 $g(x)=f(x)+2f(-x)$，则 $g(-x)=f(-x)+2f(x)=-f(x)-2f(-x)=-(f(x)+2f(-x))=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，A 错误；

对于 B，令 $g(x)=f(x)+2f(-x)$，则 $g(-x)=f(-x)+2f(x)$，因为 $g(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)+2f(x)=-(f(x)+2f(-x))\Rightarrow 3f(x)+3f(-x)=0\Rightarrow f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，B 正确；

对于 C，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，求导得 $-f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)$，所以 $f'(x)$ 为偶函数，C 正确；

对于 D，因为 $f'(x)$ 为偶函数，则 $f'(x)=f'(-x)\Rightarrow f(x)+a=-f(-x)+b\Rightarrow f(x)+f(-x)=b-a$，所以 $f(x)$ 关于 $\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$ 对称，D 错误

故选 BC

11. 已知函数 $f(x)=ax-\sin x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则下列结论正确的有 ( )

A. 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极小值 B. 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有且只有一个零点

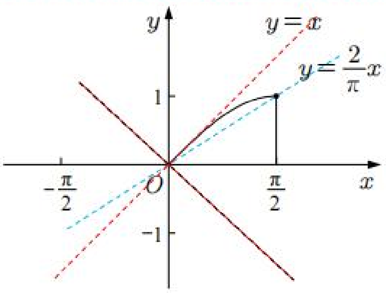
C. 若 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立，则 $0<a\leqslant\frac{2}{\pi}$ D. 若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $a\geqslant 1$

【答案】ABD

【解析】当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极小值，又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-1<0$，所以 $f(x)$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 有且只有一个零点 $x=0$，所以 AB 均正确；

对于 C，$f(x)=ax-\sin x\leqslant 0$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，即 $ax\leqslant\sin x$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，由数形结合可得：当直线 $y=ax$ 过点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 时，a 取最大值 $\frac{2}{\pi}$，所以 a 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{2}{\pi}\right)$，C 错误；



对于D，易知 $y=\sin x$ 在原点处的切线为 $y=x$，所以当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时 $x\geqslant\sin x$，

要使得 $f(x)\geqslant0$ 恒成立，即 $ax\geqslant\sin x$ 在 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，只需 $a\geqslant1$，所以D正确

故选 ABD

12. 现有12张不同编码的抽奖券，其中只有2张有奖，若将抽奖券随机地平均分给甲、乙、丙、丁4人，则（　　）

A. 2张有奖券分给同一个人的概率是 $\frac{1}{4}$　　B. 2张有奖券分给不同的人的概率是 $\frac{9}{11}$

C. 2张有奖券都没有分给甲和乙的概率为 $\frac{3}{11}$　　D. 2张有奖券分给甲和乙各一张的概率为 $\frac{3}{\ }$

【答案】BD

【解析】12张不同编码的抽奖券平均分四组共有：$\frac{C_{12}^3C_9^3C_6^3C_3^3}{A_4^4}$ 种，

2张奖券在同一组的情况有：$\frac{C_2^2C_{10}^1C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}$ 种，

2张奖券不在同一组的情况有：$\frac{C_{10}^2C_8^2C_6^3C_3^3}{A_2^2}$ 种，

对于A：2张有奖券分给同一个人的概率是 $\dfrac{\frac{C_2^2C_{10}^1C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}}{\frac{C_{12}^3C_9^3C_6^3C_3^3}{A_4^4}}=\frac{4C_{10}^1}{C_{12}^3}=\frac{2}{11}$，A错误

对于B：2张有奖券分给不同的人的概率是 $\dfrac{\frac{C_{10}^2C_8^2C_6^3C_3^3}{A_2^2}}{\frac{C_{12}^3C_9^3C_6^3C_3^3}{A_4^4}}=\frac{9}{11}$，B正确，

或因为选项A与选项B是对立事件，所以求出选项A的概率正确应为 $\frac{2}{11}$，所以选项B正确；

对于C：两张奖券都给丙或都给丁的概率为 $\frac{2}{11}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{11}$，丙、丁各一张的概率为 $\frac{9}{11}\times\frac{A_2^2}{C_4^2\cdot A_2^2}=\frac{9}{11}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{22}$，所以2张有奖券都没有分给甲和乙的概率为 $\frac{1}{11}+\frac{3}{22}=\frac{5}{22}$，C错误；

对于D：2张有奖券分给甲和乙各一张的概率为 $\frac{9}{11}\times\frac{A_2^2}{C_4^2\cdot A_2^2}=\frac{9}{11}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{22}$，D正确

故选 BD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知 $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n(n\in N^*)$ 的展开式中存在常数项，请写出一个符合条件的 n 的值______.

【答案】3（答案不唯一，3的正整数倍即可）

【解析】$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^n$ 展开式通项为 $T_{r+1}=C_n^r(\sqrt{x})^{n-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r=(-2)^rC_n^r\cdot x^{\frac{n-3r}{2}}$，当 $\frac{n-3r}{2}=0$ 时为常数项，此时 $n=3r$，即 n 为3的正整数倍即可，例如3，6，9等

14. 某新闻媒体举办主持人大赛，分为四个比赛项目："新闻六十秒""挑战会客厅""趣味绕口令""创意百分百"，每个项目独立打分，成绩均服从正态分布，成绩的均值及标准差如下表．小星在四个项目中的成绩均为 81 分，则小星同学在第 ______ 个项目中的成绩排名最靠后，在第 ______ 个项目中的成绩排名最靠前．(填序号)

序号	一	二	三	四
项目	新闻六十秒	挑战会客厅	趣味绕口令	创意百分百
μ	71	75	81	85
σ	4.9	2.1	3.6	4.3

【答案】四；二

【解析】因为只有第四个项目的成绩小于均值，所以第四个项目的成绩排名最靠后；
第一、二两个项目的成绩大于均值，第三个节目的成绩等于均值，所以排名靠前的为第一或二个项目
因为项目二的标准差小于项目一的标准差，所以项目二的数据更集中，小星在项目二的排名更靠前
答案：四；二

15. 已知 $x>0,y>0,2x+y=1$，则 $\dfrac{x^2+y^2+x}{xy}$ 的最小值为 ______

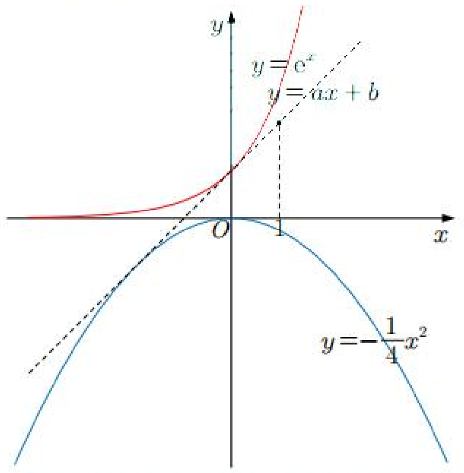
【答案】$2\sqrt{3}+1$

【解析】$\dfrac{x^2+y^2+x}{xy}=\dfrac{x^2+y^2+x(2x+y)}{xy}=\dfrac{3x^2+y^2+xy}{xy}\geqslant\dfrac{2\sqrt{3}xy+xy}{xy}=2\sqrt{3}+1$，
当且仅当 $\sqrt{3}x=y$ 时取等，此时 $x=2-\sqrt{3},y=2\sqrt{3}-3$
故答案为 $2\sqrt{3}+1$

16. 已知不等式 $-\frac{1}{4}x^2\leqslant ax+b\leqslant e^x$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，则 $a+b$ 的最大值为 ______

【答案】2

【解析】即求当 $x=1$ 时，函数 $y=ax+b$ 的最大值，
因为 $-\frac{1}{4}x^2\leqslant ax+b\leqslant e^x$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，所以当直线 $y=ax+b$ 为 $y=-\frac{1}{4}x^2$ 和 $y=e^x$ 公切线时，$a+b$ 最大
则 $\frac{1}{4}x^2+ax+b=0$ 有唯一解，此时 $\Delta=a^2-b=0\Rightarrow b=a^2$，即直线 $y=ax+a^2$ 与 $y=e^x$ 相切
设切点为 (x_0,e^{x_0})，$y'=e^x$，$k=e^{x_0}$，切线方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)\Rightarrow y=e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0}$，
则 $\begin{cases}a=e^{x_0}\\-x_0e^{x_0}+e^{x_0}=a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=0\\a=1\end{cases}$，所以公切线方程为 $y=x+1$，此时 $a+b$ 取到最大值 2



四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+6$.

(1) 求 $f(x)$ 的极小值;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值.

【解析】(1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=2$, 列表如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	增	极大值	减	极小值	增

所以函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)=2$

(2) 由 (1) 知:当 $x\in(-1,0)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增

当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减,

$f(-1)=2$, $f(1)=4$, $f(1)>f(-1)$, 所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=2$, $f(x)_{\max}=f(0)=6$

即 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为6,最小值为2

18. (12分)

设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 其中 $n\geqslant2, n\in N^*$.

(1) 当 $n=9$ 时, 求 $a_1+a_2+\cdots+a_9$ 的值;

(2) 在展开式中, 若存在连续三项的系数之比为3:4:5, 求 n 的值.

【解析】(1) 当 $n=9$ 时, 令 $x=0$ 可得 $a_0=1$; 令 $x=1$, 可得 $2^9=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_9=2^9-1=511$;

(2) 因为 $a_r=C_n^r$, 所以 $a_{r-1}=C_n^{r-1}$, $a_{r+1}=C_n^{r+1}$, 由题意得 $\begin{cases}4a_{r-1}=3a_r\\5a_r=4a_{r+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4C_n^{r-1}=3C_n^r\\5C_n^r=4C_n^{r+1}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{4n!}{(n-r+1)!(r-1)!}=\dfrac{3n!}{(n-r)!r!}\\\dfrac{5n!}{(n-r)!r!}=\dfrac{4n!}{(n-r-1)!(r+1)!}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{4}{n-r+1}=\dfrac{3}{r}\\\dfrac{5}{n-r}=\dfrac{4}{r+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3n+3=7r\\4n-5=9r\end{cases}\Rightarrow n=62$$

19. (12分)

已知某校高一有450名学生(其中男生250名, 女生200名). 为了给学生提供更为丰富的校园文化生活, 学校增设了两门全新的校本课程 A, B, 学生根据自己的兴趣爱好在这两门课程中任选一门进行学习. 学校统计了学生的选课情况, 得到如下的 2×2 列联表.

	选择课程 A	选择课程 B	总计
男生		150	
女生	50		
总计			

(1) 请将列联表补充完整, 并判断是否有99.9%的把握认为选择课程与性别有关? 说明你的理由;

(2) 从所有男生中按列联表中的选课情况进行分层抽样, 抽出10名男生, 再从这10名男生中抽取3人做问卷调查, 设这3人中选择课程A的人数为 X, 求 X 的分布列及数学期望.

附: $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

$P(\chi^2\geqslant\chi_0)$	0.10	0.005	0.001
k	2.706	7.879	10.828

【解析】(1) 2×2 联表如下:

	选择课程 A	选择课程 B	总计
男生	100	150	250
女生	50	150	200
总计	150	300	450

零假设H_0:没有99.9%的把握认为选择课程与性别有关

$$\chi^2=\frac{450(100\times150-150\times50)^2}{150\times300\times200\times250}=\frac{45}{4}=11.25>10.828,$$

所以假设不成立,有99.9%的把握认为选择课程与性别有关

(2)因为选择课程A的男生与选择课程B的男生比为2:3,所以分层抽样抽出10名男生,则抽出的男生中选择课程A的人数为$10\times\frac{2}{2+3}=4$人,抽出的男生中选择课程B的人数为$10\times\frac{3}{2+3}=6$人,

在从这10名男生中抽取3人做问卷调查,这3人中选择课程A的人数为X,X的可能取值为0,1,2,3

则$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$;

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$;

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$;

$P(X=3)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$

分布列如下表:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

数学期望$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$

法二:X服从超几何分布:$X\sim H(3,4,10)$,则$E(X)=\frac{4\times3}{10}=\frac{6}{5}$

20.(12分)

已知函数$f(x)$满足$f(2+x)\cdot f(2-x)=4$. 当$x\in[0,2]$时,$f(x)=x^2-ax+2a-2(a>0)$.

(1)若$f(2)+f(3)=6$,求a的值;

(2)当$x\in[0,4]$时,都有$1\leqslant f(x)\leqslant3$,求$a$的取值范围.

【解析】(1)因为当$x\in[0,2]$时,$f(x)=x^2-ax+2a-2(a>0)$,所以$f(1)=a-1,f(2)=2$

在$f(2+x)\cdot f(2-x)=4$中令$x=1$可得$f(3)f(1)=4$,所以$f(3)=\frac{4}{a-1}$

所以$f(2)+f(3)=2+\frac{4}{a-1}=6$,解得$a=2$

(2)由$f(2+x)\cdot f(2-x)=4$可得$f(x)\cdot f(4-x)=4$,当$x\in[0,2]$时,$4-x\in[2,4]$,$f(4-x)=\frac{4}{f(x)}$

因为当$x\in[0,4]$时,都有$1\leqslant f(x)\leqslant3$,所以当$4-x\in[2,4]$,$f(4-x)=\frac{4}{f(x)}\in[1,3]$解得$\frac{4}{3}\leqslant f(x)\leqslant4$

又因为$1\leqslant f(x)\leqslant3$,所以$\frac{4}{3}\leqslant f(x)\leqslant3$在$x\in[0,2]$上恒成立

①当$0<a\leqslant2$时,$f(x)=x^2-ax+2a-2$在$x\in[0,2]$上的值域为$\left[f\left(\frac{a}{2}\right),f(2)\right]$,

所以$\begin{cases}f(2)=2\leqslant3\\ f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{1}{4}(a-4)^2+2\geqslant\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow4-\frac{2\sqrt6}{3}\leqslant a\leqslant4+\frac{2\sqrt6}{3}$,因为$0<a\leqslant2$,所以不存在

②当 $2<a\leqslant 4$, $f(x)=x^2-ax+2a-2$ 在 $x\in[0,2]$ 上的值域为 $\left[f\left(\frac{a}{2}\right),f(0)\right]$,

所以 $\begin{cases}f(0)=2a-2\leqslant 3\\ f\left(\frac{a}{2}\right)\geqslant\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\leqslant\frac{5}{2}\\ 4-\frac{2\sqrt{6}}{3}\leqslant a\leqslant 4+\frac{2\sqrt{6}}{3}\end{cases}\Rightarrow 4-\frac{2\sqrt{6}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$,

因为 $2<a\leqslant 4$, 所以 $4-\frac{2\sqrt{6}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{5}{2}$

③当 $a>4$ 时, $f(x)=x^2-ax+2a-2$ 在 $x\in[0,2]$ 上的值域为 $[f(2),f(0)]$

所以 $\begin{cases}f(0)=2a-2\leqslant 3\\ f(2)=2\geqslant\frac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow a\leqslant\frac{5}{2}$, 因为 $a>4$, 所以不存在 a 的值满足要求

综上 a 的取值范围为 $\left[4-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{5}{2}\right]$

法2:必要性探路缩小 a 的取值范围,减少讨论

(2) 由题意知: $\forall x\in[0,2]$, $\frac{4}{3}\leqslant f(x)\leqslant 3$, $f(0)=2a-2$, $f(1)=a-1$

由题意知: $\begin{cases}\frac{4}{3}\leqslant 2a-2\leqslant 3\\ \frac{4}{3}\leqslant a-1\leqslant 3\end{cases}\Rightarrow a\in\left[\frac{7}{3},\frac{5}{2}\right]$

则 $\frac{a}{2}\in\left[\frac{7}{6},\frac{5}{4}\right]$, 因此 $x\in[0,2]$ 时, $f(x)\in\left[f\left(\frac{a}{2}\right),f(0)\right]$

$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{8a-8-a^2}{4}\geqslant\frac{4}{3}$, 解得: $a\in\left[\frac{12-2\sqrt{6}}{3},\frac{12+2\sqrt{6}}{3}\right]$

综上, $a\in\left[\frac{12-2\sqrt{6}}{3},\frac{5}{2}\right]$.

21. **(12 分)**

十番棋也称十局棋, 是围棋比赛的一种形式. 对亦双方下十局棋, 先胜六局者获胜. 这种形式的比赛因对局较多, 偶然性较小, 在中国明清时期和日本都流行过. 在古代比较有名的十番棋有清代黄龙士和徐星友的"血泪十局"以及范西屏和施襄夏的"当湖十局". 已知甲、乙两人进行围棋比赛, 每局比赛甲获胜的概率和乙获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$, 且各局比赛胜负相互独立.

(1) 若甲、乙两人进行十番棋比赛, 求甲至多经过七局比赛获胜的概率;

(2) 甲、乙两人约定新赛制如下: 对弈双方需赛满 $2n(n\in N^*)$ 局, 结束后统计双方的获胜局数, 如果一方获胜的局数多于另一方获胜的局数, 则该方赢得比赛. 研究表明: n 越大, 某一方赢得比赛的概率越大. 请从数学角度证明上述观点.

【解析】(1) 设甲至多经过七局比赛获胜为事件 A, $P(A)=\frac{1}{2^6}+C_6^1\cdot\frac{1}{2^7}=\frac{1}{16}$

故甲至多经过七局比赛获胜的概率为 $\frac{1}{16}$;

(2) 设某一方赢得比赛的概率为 P_n, 双方平局为事件 B

法一: $P(B)=C_{2n}^n\cdot\frac{1}{2^{2n}}$, 则 $P_n=\frac{1-P(B)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{C_{2n}^n}{2^{2n+1}}$

法二: $P_n=\frac{1}{2^{2n}}(C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+C_{2n}^{n+3}+\cdots+C_{2n}^{2n})$

$=\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot 2(C_{2n}^{n+1}+C_{2n}^{n+2}+C_{2n}^{n+3}+\cdots+C_{2n}^{2n})$

$=\frac{1}{2^{2n+1}}(C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n}-C_{2n}^n)$

$=\frac{1}{2^{2n+1}}(2^{2n}-C_{2n}^n)$

$=\frac{1}{2}-\frac{C_{2n}^n}{2^{2n+1}}$

则 $P_{n+1}-P_n=\frac{C_{2n}^m}{2^{2n+1}}-\frac{C_{2n+2}^{m+1}}{2^{2n+3}}=\frac{4C_{2n}^m-C_{2n+2}^{m+1}}{2^{2n+3}}$

$4C_{2n}^m-C_{2n+2}^{m+1}=4\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}=2\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}\cdot\left(2-\frac{2n+1}{n+1}\right)=2\cdot\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}>0$

故 $P_{n+1}-P_n>0$，即 $P_{n+1}>P_n$，因此 n 越大，某一方赢得比赛的概率越大

法三：$P_{n+1}=\left(P_n-C_{2n}^{m+1}\frac{1}{2^{2n}}\right)\cdot 1+C_{2n}^{m+1}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\left(1-C_2^0\frac{1}{2^2}\right)+C_{2n}^m\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{2^2}$

则 $P_{n+1}-P_n=\frac{C_{2n}^m-C_{2n}^{m+1}}{2^{2n+2}}=\frac{(2n)!}{4^{n+1}}\left[\frac{1}{n!n!}-\frac{1}{(n+1)!(n-1)!}\right]$

$=\frac{(2n)!}{4^{n+1}\cdot(n-1)!n!}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{(2n)!}{4^{n+1}\cdot n!(n+1)!}>0$

即 $P_{n+1}>P_n$，故 n 越大，某一方赢得比赛的概率越大.

注：①法一法二求出了 P_n，法三直接求出了 $P_{n+1}-P_n$；

②此题借鉴2023届高三武汉四月调考，见马尔科夫链微专题

22. **(12分)**

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-\ln x-1$ 与函数 $g(x)=e^x-ax$ 有相同的最小值.

(1) 求实数 a 的值；

(2) 求不等式 $e^x-\frac{ax^2}{1+\ln x}<0$ 的解集.

【解析】(1) $f'(x)=\frac{ax^2-1}{x}$，$x>0$，$g'(x)=e^x-a$，$x\in R$

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递减，$f(x)$ 无最小值，与题意不符

故 $a>0$

$x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 时，$f'(x)<0$；$x\in\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$

$x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$g'(x)<0$；$x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 递减，$\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$ 递增，$g(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 递减，$(\ln a,+\infty)$ 递增

$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\frac{\ln a-1}{2}$，$g(x)_{\min}=g(\ln a)=a-a\ln a$

由题意知：$\frac{\ln a-1}{2}=a-a\ln a$，解得：$a=e$；

(2) 法1：由 (1) 知：$a=e$，不等式即为 $e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}<0$

当 $1+\ln x<0$ 时，$e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}>0$，故 $1+\ln x>0$，即 $x>\frac{1}{e}$

不等式可化为：$1+\ln x-\frac{x^2}{e^{x-1}}<0$ 且 $x>\frac{1}{e}$

令 $h(x)=1+\ln x-\frac{x^2}{e^{x-1}}$，$x>0$，$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x-x^2}{e^{x-1}}=\frac{1+\frac{x^3-2x^2}{e^{x-1}}}{x}$

令 $u(x)=1+\frac{x^3-2x^2}{e^{x-1}}$，$x>0$，$u'(x)=\frac{-x(x-1)(x-4)}{e^{x-1}}$

$x\in(0,1)\cup(4,+\infty)$ 时，$u'(x)<0$；$x\in(1,4)$ 时，$u'(x)>0$

故 $u(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，$(1,4)$ 递增，$(4,+\infty)$ 递减

$x\in(0,4)$ 时，$u(x)\geqslant u(1)=0$；$x>4$ 时，$u(x)=1+\frac{x^2(x-2)}{e^{x-1}}>1$

因此，$u(x)\geqslant 0$，即 $h'(x)\geqslant 0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 递增

又 $h(1)=0$，故 $h(x)<0$ 的解集为 $x\in(0,1)$，

因此所求不等式的解集为$\left(\frac{1}{e},1\right)$

法2：$a=e$，令$h(x)=e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}$，即解不等式$h(x)<0$，

当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$\frac{ex^2}{1+\ln x}<0$，所以$h(x)=e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}>0$，不合题意.

当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，由(1)知$e^x\geqslant ex$，

所以$h'(x)=e^x-\frac{ex(1+2\ln x)}{(1+\ln x)^2}\geqslant ex-\frac{ex(1+2\ln x)}{(1+\ln x)^2}=\frac{ex\cdot\ln^2 x}{(1+\ln x)^2}\geqslant 0$，

所以$h(x)$在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增，又因为$h(1)=0$，所以$h(x)=e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}<0$的解集为$\left(\frac{1}{e},1\right)$

综上所述，不等式$e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}<0$的解集为$\left(\frac{1}{e},1\right)$.

法3：因为$a=e$，令$h(x)=e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}$，即解不等式$h(x)<0$，

当$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$\frac{ex^2}{1+\ln x}<0$，所以$h(x)=e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}>0$，不合题意.

当$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，由$e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}<0$得$\frac{e^x}{x}<\frac{ex}{1+\ln x}=\frac{ex}{\ln(ex)}=\frac{e^{\ln(ex)}}{\ln(ex)}$

令$t(x)=\frac{e^x}{x}$，则$t'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}=0$，得$x=1$，所以$t(x)$在$\left(\frac{1}{e},1\right)$上单调递减，在$(1,+\infty)$单调递增

①当$x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$时，$\ln(ex)\in(0,1)$. 因为$\frac{e^x}{x}<\frac{e^{\ln(ex)}}{\ln(ex)}$，即$t(x)<t(\ln(ex))$，所以$x>\ln(ex)$，即$x>1+\ln x$

记$F(x)=x-\ln x-1$，$F'(x)=\frac{x-1}{x}<0$在$x\in(0,1)$上恒成立，所以$F(x)$在$\left(\frac{1}{e},1\right)$单调递减

所以$F(x)>F(1)=0$，即$x>\ln x+1$在$x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$恒成立，满足题意.

②当$x\in[1,+\infty)$时，$\ln(ex)\in(1,+\infty)$. 因为$\frac{e^x}{x}<\frac{e^{\ln(ex)}}{\ln(ex)}$，即$t(x)<t(\ln(ex))$，所以$x<\ln(ex)$，即$x<1+\ln x$

记$F(x)=x-\ln x-1$，$F'(x)=\frac{x-1}{x}\geqslant 0$在$x\in x\in[1,+\infty)$上恒成立，所以$F(x)$在$x\in[1,+\infty)$单调递增

所以$F(x)\geqslant F(1)=0$，即$x\geqslant\ln x+1$在$x\in[1,+\infty)$恒成立，所以$x<1+\ln x$在$x\in[1,+\infty)$无解

综上所述，不等式$e^x-\frac{ex^2}{1+\ln x}<0$的解集为$\left(\frac{1}{e},1\right)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。