数学参考答案

选择题：(共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，其中 9 至 12 题为多选题，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分).

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	A	B	C	D	B	A	BC	ABD	BD	BD

填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $y=2x-1$

14. $(-\frac{6}{5},-\frac{3}{5})$

15. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

16. 59，$2^{\frac{n+4}{2}}-5$

(说明：第 16 题第一空 2 分，第 2 空 3 分)

1.【答案】C

【详解】$A=\{x\in Z\mid x^2+x>6\}=\{x\in Z\mid x>2\text{或}x<-3\}$，$B=\{x\mid -4\le x\le 4\}$，则 $A\cap B=\{-4,3,4\}$

2.【答案】A

【详解】$(2+i)z=m$，$z=\frac{m}{2+i}=\frac{m(2-i)}{5}$，$\bar{z}=\frac{2m}{5}+\frac{m}{5}i$，又 m 为正实数

复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于第一象限

3.【答案】A

【详解】直线 $l_1:ax+y+1=0$ 与 $l_2:x+ay-1=0$ 平行的充要条件是：$k_1=k_2$ 且不重合，由 $-a=\frac{1}{-a}$ 得 $a=\pm1$，又 $a=-1$ 时两直线重合，直线 $l_1:ax+y+1=0$ 与 $l_2:x+ay-1=0$ 平行的充要条件是 $a=1$

4.【答案】B

【详解】将任意一张纸片沿直线(不过顶点)剪开，得到 2 张纸片，则总边数增加 4，所以 $\{a_n\}$ 公差为 4，首项为 8 的等差数列，$a_1+a_2+a_3\cdots+a_{10}=10\times8+\frac{10\times9}{2}\times4=260$

5.【答案】

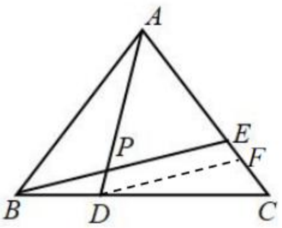
C【详解】

如图，过 D 作直线 DF//BE，交 AC 于 F，则 $\frac{EF}{EC}=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{3}$，$\therefore EF=\frac{1}{3}EC=\frac{1}{3}\frac{AE}{2}=\frac{AE}{6}$

$\therefore \frac{AE}{AF}=\frac{6}{7}$，$\therefore \frac{AP}{AD}=\frac{AE}{AF}=\frac{6}{7}$ $\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{6}{7}\overrightarrow{AD}=\frac{6}{7}(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC})$

又 B,D,C 三点共线，$\therefore x+y=1$

故 $m+n=\frac{6}{7}(x+y)=\frac{6}{7}$



6.【答案】D

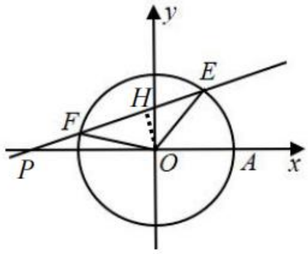
【详解】$\because$ 函数 $g(x)$ 为奇函数，且 $g(x+4)=g(x)$

取 $x=-2$ 得，$g(-2+4)=g(-2)=-g(2)$，即 $g(2)=-g(2)$，$\therefore g(2)=0$

又 $g(6)=g(2+4)=g(2)=0$，$\therefore f(6)=g(6)-6^2=-36$

7.【答案】B

【详解】法一：如图，设直线 EF 交 x 轴于点 P，过 O 作 EF 的垂线，垂足为 H，则 $\angle AOH=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，



$\angle POH=\dfrac{\pi}{2}-\angle HPO$

又直线 EF 的斜率为 $\dfrac{1}{4}$，$\therefore \tan\angle POH=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\tan\angle AOH=-\tan\angle POH=-\tan(\dfrac{\pi}{2}-\angle HPO)=-4$

$$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1}=\frac{2\times(-4)}{(-4)^2+1}=-\frac{8}{17}$$

法二：设 $E(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$F(\cos\beta,\sin\beta)$，则 $k_{EF}=\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\dfrac{1}{4}$

又 $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\dfrac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=-\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}$，$\therefore \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-4$

同法一可得 $\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{8}{17}$

8.A【答案】

【详解】$f(x)=0\Leftrightarrow e^x+x=x^a+a\ln x=e^{a\ln x}+a\ln x$

令 $g(x)=e^x+x$，则 $g(x)=g(a\ln x)$ 在区间 $(1,e^2)$ 上恰有 2 个实根

$\because g(x)$ 在 R 上单调递增，$\therefore x=a\ln x$ 即 $a=\dfrac{x}{\ln x}$ 在区间 $(1,e^2)$ 上恰有 2 个实根，

$\therefore h(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 与 $y=a$ 在区间 $(1,e^2)$ 上恰有 2 个交点

$h'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，$\therefore h(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ 在区间 $(1,e)$ 上单调递减，在区间 (e,e^2) 上单调递增

当 $x\to 1$ 时，$h(x)\to\infty$，且 $h(e)=e$，$h(e^2)=\frac{e^2}{2}$；故 $e<a<\frac{e^2}{2}$，选 A

9.【答案】BC

【详解】由函数 $f(x)=0.3^x$ 在 R 上单调递减，得 $0.3^{0.7}>0.3^{0.9}$，故 A 选项不正确；

由函数 $f(x)=\log_{1.3}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，得 $\log_{1.3}3>\log_{1.3}2$，故 B 选项正确；

$\log_{0.3}0.2>\log_{0.3}0.3=1$，$0.3^{0.2}<0.3^0=1$，所以 $\log_{0.3}0.2>0.3^{0.2}$，故 C 选项正确；

$\log_3 2>\log_3\sqrt{2}=\frac{1}{2}$，$2^{-1.1}<2^{-1}=\frac{1}{2}$，所以 $\log_3 2>0.3^{-1.1}$，故 D 选项不正确；

10.【答案】ABD

【详解】$f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 过点 $(-\frac{4\pi}{9},0)$，$\therefore\cos(-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6})=0$

$-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$ 解得 $\omega=-\frac{3}{4}-\frac{9k}{4}(k\in Z)$，

由图知 $\frac{4\pi}{9}<T=\frac{2\pi}{\omega}<\frac{13\pi}{9}$，所以 $\frac{18}{13}<\omega<\frac{9}{2}$，故 $\omega=\frac{3}{2}$

所最小正周期为 $\frac{4\pi}{3}$，A 选项正确；

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{12}]$，$f(x)=\cos(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6})$ 单调递减，B 选项正确；

$f(x)=\cos(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6})$ 的对称轴为 $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}(k\in Z)$，$x=-\frac{5\pi}{9}$ 不是 $f(x)$ 的对称轴，故 C 选项不正确；

将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位得到 $y=\sin(x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象，再将图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{2}{3}$ 倍，得到 $y=\sin(\frac{3}{2}x+\frac{2\pi}{3})$ 的图象，

又 $y=\sin(\frac{3}{2}x+\frac{2\pi}{3})=\sin(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{6})$，故 D 选项正确

11.【答案】BD

【详解】记圆 M 的半径为 R，R=2，$|OM|$=6，圆 O 的半径为 r

点(4,2)在圆 $M:(x-6)^2+y^2=4$ 外，故作圆 M 的切线恰有 2 条，故 A 不正确；

圆 O 和圆 M 恰有 3 条公切线，则圆 O 和圆 M 相外切，$\therefore|OM|=r+R$，$r=4$，故 B 正确；

当圆 O 和圆 M 外离时，$|PQ|$ 的最小值为 $|OM|-r-R=1$，此时 $r=3$，

当圆 O 和圆 M 内含时，$|PQ|$ 的最小值为 $r-|OM|-R=1$，此时 $r=9$，故 C 不正确；

当 $r=2$ 时，则直线 PQ 的斜率的最大值是斜率为正的内公切线斜率，

此时 $k=\dfrac{r+R}{\sqrt{|OM|^2-(r+R)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{36-16}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 D 正确

12.【答案】BD

【详解】

$\because b=1$，$a^2-c^2=2$，$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{3}{2a}<1$，故 $a>\dfrac{3}{2}$，选项 A 不正确；

由 $\cos C=\dfrac{3}{2a}=\dfrac{3b}{2a}=\dfrac{3\sin B}{2\sin A}$，$\therefore 2\sin A\cos C=3\sin B$，又 $\sin B=\sin(A+C)$

$\therefore 2\sin A\cos C=3\sin A\cos C+3\cos A\sin C$，即 $\tan A+3\tan C=0$，选项 B 正确；

又 $\cos C=\dfrac{3}{2a}>0$，$\therefore C\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\tan C>0$

$$\tan B=-\tan(A+C)=-\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\frac{2\tan C}{1+3\tan^2 C}=\frac{2}{\dfrac{1}{\tan C}+3\tan C}\le\frac{2}{2\sqrt{\dfrac{1}{\tan C}\times 3\tan C}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(当且仅当 $\tan C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即 $C=\dfrac{\pi}{6}$，$B=\dfrac{\pi}{6},A=\dfrac{2\pi}{3}$ 取等号)，$\therefore B\le\dfrac{\pi}{6}$，选项 C 不正确；

$\because B\le\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore \sin B\le\dfrac{1}{2}$，$\Delta ABC$ 的外接圆直径 $2R=\dfrac{b}{\sin B}\ge 2$，

ΔABC 的外接圆面积 $S=\pi R^2\ge\pi$，(当且仅当 $\tan C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即 $C=\dfrac{\pi}{6}$，$B=\dfrac{\pi}{6},A=\dfrac{2\pi}{3}$ 取等号)，选项 D 正确；

13.【答案】 $y=2x-1$

【详解】 $f(x)=e^{x-1}+\dfrac{\ln x}{x}$，$\therefore f(1)=1$

又 $f'(x)=e^{x-1}+\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$\therefore f'(1)=2$

故切线斜率 $k=f'(1)=2$，切点为 $(1,1)$

$\therefore$ 切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$

14.【答案】 $(-\dfrac{6}{5},-\dfrac{3}{5})$

【详解】 设向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\lambda\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}^2=5\lambda$

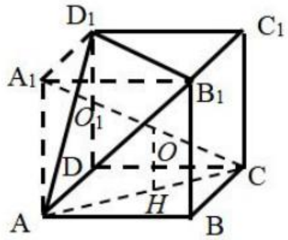
$\because (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\therefore (\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，

即 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，又 $\boldsymbol{a}=(2,1),|\boldsymbol{b}|=1$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$

$\therefore 5\lambda=-3$，$\therefore \lambda=-\dfrac{3}{5}$，故向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\lambda\boldsymbol{a}=(-\dfrac{6}{5},-\dfrac{3}{5})$

15.【答案】 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

【详解】如图，设球心为 O，半径为 r，由题可知，球 O 半径最大时，与平面 $ABCD$，平面 BCC_1B_1，平面 DCC_1D_1，平面 AB_1D_1 均相切，设球 O 与平面 $ABCD$ 相切于点 H，与平面 AB_1D_1 相切于点 O_1，则 O_1 为 ΔAB_1D_1 的中心，



$\therefore OO_1=OH=r$，$O_1C=\frac{2}{3}A_1C=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$OC=O_1C-OO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}-r$，由 $\frac{OH}{OC}=\sin\angle A_1CA=\frac{1}{\sqrt{3}}$，

得 $\frac{r}{\frac{2\sqrt{3}}{3}-r}=\sin\angle A_1CA=\frac{1}{\sqrt{3}}$，解得 $r=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

16.【答案】 59，$2^{\frac{n+4}{2}}-5$

【详解】由题可知 $a_2=2a_1+1=3$，$a_3=a_2+2=5$，$a_4=2a_3+1=11$，$a_5=a_4+2=13$，

$a_6=2a_5+1=27$，$a_7=a_6+2=29$，$a_8=2a_7+1=59$

$a_{2n+2}=2a_{2n+1}+1=2(a_{2n}+2)+1=2a_{2n}+5$，$\therefore a_{2n+2}+5=2(a_{2n}+5)$

$\therefore$ 数列 $\{a_{2n}+5\}$ 是首项为 $a_2+5=8$，公比为 2 的等比数列，

$\therefore a_{2n}+5=8\times2^{n-1}$，$a_{2n}=2^{n+2}-5$，故当 n 为偶数时 $a_n=2^{\frac{n+4}{2}}-5$

解答题：本大题共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases}a_1+d=7\\5a_1+\frac{5\times4}{2}d=55\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=3\\d=4\end{cases}$，

所以 $a_n=3+4(n-1)=4n-1$，$S_n=3\times n+\frac{n(n-1)\times4}{2}=2n^2+n$……………………5 分

(2) $b_n=\frac{a_{n+1}}{S_n\cdot S_{n+1}}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n\cdot S_{n+1}}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}$……………………7 分

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2})+(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3})+(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4})+\cdots+(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}})$

$=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2(n+1)^2+(n+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n^2+5n+3}$……………………10 分

18.（本小题满分 12 分）

解：(1)设点 $M(x,y)$，当点 M 不与点 P 重合时，即当 $x\neq2$ 且 $y\neq2$ 时，

由垂径定理可知 $CM\perp AB$，即 $CM\perp PM$……………………2 分

设点 $M(x,y)$，又圆 C 的圆心为 $(8,0)$，$P(2,2)$

$\therefore \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{PM}=(x-8)(x-2)+y(y-2)=0$，即$(x-5)^2+(y-1)^2=10$……4 分

当点 M 与点 P 重合时，点 P 的坐标也满足方程$(x-5)^2+(y-1)^2=10$

故点 M 的轨迹方程为圆 $N:(x-5)^2+(y-1)^2=10$……5 分

(2)当$|OM|=|OP|=2\sqrt{2}$时，点 M 与点 P 满足圆 O 的方程$x^2+y^2=8$

又点 M 与点 P 在圆 $N:(x-5)^2+(y-1)^2=10$ 上

$\therefore$直线 MP 为圆 O 和圆 N 的交线，圆 O 与圆 N 的方程相减得，

直线 MP 的方程为$(x^2+y^2)-[(x-5)^2+(y-1)^2]=8-10$，即$5x+y-12=0$

$\therefore l$ 的方程为：$5x+y-12=0$……8 分

点 O 到直线 MP 的距离$d=\dfrac{|-12|}{\sqrt{5^2+1}}=\dfrac{12}{\sqrt{26}}$……9 分

又圆 O 的半径$r=2\sqrt{2}$

$\therefore$弦长$|MP|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{8-\dfrac{144}{26}}=\dfrac{16}{\sqrt{26}}$……11 分

$\therefore \triangle POM$ 的面积$S=\dfrac{1}{2}|MP|d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{\sqrt{26}}\times\dfrac{12}{\sqrt{26}}=\dfrac{48}{13}$……12 分

法二：设$M(m,n)$

由题意可得$\begin{cases}m^2+n^2=8\\(m-5)^2+(n-1)^2=10\\m\neq 2\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=\dfrac{34}{13}\\n=-\dfrac{14}{13}\end{cases}$，即点$M(\dfrac{34}{13},-\dfrac{14}{13})$……7 分

又$k_{PM}=\dfrac{-\dfrac{14}{13}-2}{\dfrac{34}{13}-2}=-5$，

$\therefore$直线 l 的方程为$y-2=-5(x-2)$，即$5x+y-12=0$……9 分

$k_{OP}=1$，则直线 OP 的方程为$x-y=0$，且$|OP|=2\sqrt{2}$……10 分

点 M 到直线 OP 的距离为$d=\dfrac{\dfrac{48}{13}}{\sqrt{2}}=\dfrac{48}{13\sqrt{2}}$……11 分

故$\triangle POM$ 的面积$S=\dfrac{1}{2}|OP|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{48}{13\sqrt{2}}=\dfrac{48}{13}$……12 分

19.（本小题满分 12 分）

解：(1)取 AB 中点 O，连接OC,OA_1,A_1B，

$\because AC=BC$，$OA=OB\ \therefore AB\perp OC$……1 分

$\because \triangle AA_1B$ 为正三角形，$OA=OB\ \therefore AB\perp OA_1$……2 分

又$\because OC\cap OA_1=O$，OC、$OA_1\subset$平面A_1OC，$\therefore AB\perp$平面A_1OC……4 分

(2) $\because A_1C \perp BC_1$，又$\therefore AB \perp A_1C$，$BC_1 \cap AB = B$，$BC_1, AB \in$平面ABC_1

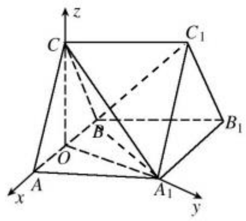
$\therefore A_1C \perp$平面ABC_1，又$AC_1 \subset$平面ABC_1，$\therefore A_1C \perp AC_1$

$\therefore$四边形AA_1C_1C为菱形，$\therefore AC = AA_1 = 2$，ΔABC为等边三角形，$OC = \sqrt{3}$，以O为原点，

如图建立空间直角坐标系，……7 分

$A(1,0,0), B(-1,0,0), A_1(0,\sqrt{3},0), B_1(-2,\sqrt{3},0), C(0,0,\sqrt{3})$

设平面BA_1C的法向量$\overrightarrow{n_1} = (x,y,z)$，$\overrightarrow{BA_1} = (1,\sqrt{3},0), \overrightarrow{BC} = (1,0,\sqrt{3})$



则$\begin{cases} x+\sqrt{3}y = 0 \\ x+\sqrt{3}z = 0 \end{cases}$，令$z=-1$，可得$\overrightarrow{n_1} = (\sqrt{3},-1,-1)$……9 分

设平面BA_1C_1的法向量$\overrightarrow{n_2} = (x,y,z)$，

$\overrightarrow{BA_1} = (1,\sqrt{3},0), \overrightarrow{A_1C_1} = AC = (-1,0,\sqrt{3})$

则$\begin{cases} x+\sqrt{3}y = 0 \\ -x+\sqrt{3}z = 0 \end{cases}$，令$z=1$，可得$\overrightarrow{n_2} = (\sqrt{3},-1,1)$……11 分

则$\cos < \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2} > = \dfrac{3+1-1}{\sqrt{3+1+1} \times \sqrt{3+1+1}} = \dfrac{3}{5}$.

所以平面BA_1A与平面CA_1A夹角的余弦值为$\dfrac{3}{5}$……12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：(1)在ΔABC中，$\cos B = \dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB \cdot BC} = \dfrac{AB^2+1-(AB^2+AB+1)}{2AB} = -\dfrac{1}{2}$，

因为$0^\circ < B < 180^\circ$，所以$B = 120^\circ$……2 分

由$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AB = \sqrt{3}$，得$AB = 4$……3 分

$\therefore AC^2 = AB^2 + AB + 1 = 16+4+1 = 21$，即$AC = \sqrt{21}$……4 分

$\therefore AB + BC + AC = 5 + \sqrt{21}$，即$\Delta ABC$的周长为$5+\sqrt{21}$……5 分

(2)设$\angle BDC = \theta$，则$\angle DBC = 60^\circ - \theta$，$\angle ABD = 60^\circ + \theta$，$\angle BAD = 60^\circ - \theta$.

在ΔABD中，由$\dfrac{BD}{\sin(60^\circ - \theta)} = \dfrac{AB}{\sin 60^\circ}$，得$BD = \dfrac{3\sin(60^\circ - \theta)}{\sin 60^\circ}$……7 分

在ΔBCD中，由$\dfrac{BD}{\sin 120^\circ} = \dfrac{BC}{\sin\theta}$，得$BD = \dfrac{\sin 120^\circ}{\sin\theta}$……9 分

$\therefore \dfrac{3\sin(60^\circ - \theta)}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\sin 120^\circ}{\sin\theta}$，即$4\sin\theta\sin(60^\circ - \theta) = 1$

$\therefore \sin(2\theta + 30^\circ) = 1$……11 分

$\because 0^\circ < \theta < 60^\circ$，$\therefore 30^\circ < 2\theta + 30^\circ < 150^\circ$，

$\therefore 2\theta + 30^\circ = 90$，解得$\theta = 30^\circ$，即$\angle BDC$的值为$30^\circ$……12 分

21.（本小题满分 12 分）

$\therefore f(1)\le 1$，即 $f(1)=-a+3\le 1$，$\therefore a\ge 2$……2 分

下面证明：当 $a\ge 2$ 时，$f(x)\le 1$ 恒成立

当 $a\ge 2$ 时，$f(x)=x\ln x-ax^2+3x\le x\ln x-2x^2+3x$

欲证 $f(x)\le 1$，只需证 $x\ln x-2x^2+3x\le 1$，

$\because x>0$，故只需证 $\ln x-2x+3\le \frac{1}{x}$，即证：$\ln x-2x+3-\frac{1}{x}\le 0$……4 分

令 $g(x)=\ln x-2x+3-\frac{1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2+\frac{1}{x^2}=\frac{-2x^2+x+1}{x^2}=-\frac{(2x+1)(x-1)}{x^2}$

故知函数 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减

故 $g(x)_{\max}=g(1)=0$，故 $g(x)\le 0$，即 $\ln x-2x+3\le \frac{1}{x}$ 成立

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[2,+\infty)$……6 分

(2)由(1)可知当 $a=2$ 时，$f(x)\le 1$，

即 $x\ln x-2x^2+3x\le 1$，即 $\ln x\le 2x+\frac{1}{x}-3$……8 分

取 $x=\frac{n+1}{n}$ 得，$\ln\frac{n+1}{n}\le\frac{2(n+1)}{n}+\frac{n}{n+1}-3=\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+2}{n(n+1)}$……10 分

$\therefore \frac{3}{1\times 2}+\frac{4}{2\times 3}+\frac{5}{3\times 4}+\cdots+\frac{n+2}{n(n+1)}\ge \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)$……12 分

22.（本小题满分 12 分）

解：(Ⅰ) $f'(x)=a(1-\frac{1}{x})-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{(x-1)(ax^2-2)}{x^3}(x>0)$……1 分

由 $f'(x)=\dfrac{a(x-1)(x-\sqrt{\frac{2}{a}})(x+\sqrt{\frac{2}{a}})}{x^3}=0\Rightarrow x_1=1,x_2=\sqrt{\frac{2}{a}}$……2 分

①当 $0<a<2$ 时，$\sqrt{\frac{2}{a}}>1$

$x\in(0,1)$ 或 $x\in(\sqrt{\frac{2}{a}},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；$x\in(1,\sqrt{\frac{2}{a}})$ 时，$f'(x)<0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,\sqrt{\frac{2}{a}})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{\frac{2}{a}},+\infty)$ 上单调递增……3 分

②当 $a=2$ 时，$\sqrt{\frac{2}{a}}=1$

③当$a>2$时，$0<\sqrt{\dfrac{2}{a}}<1$，

$x\in(0,\sqrt{\dfrac{2}{a}})$或$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$；$x\in(\sqrt{\dfrac{2}{a}},1)$时，$f'(x)<0$

$\therefore f(x)$在$(0,\sqrt{\dfrac{2}{a}})$上单调递增，在$(\sqrt{\dfrac{2}{a}},1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增…………5 分

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，$a=1$时，$f(x)=x-\ln x+\dfrac{2x-1}{x^2}$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}$

记$F(x)=f(x)-f'(x)-\dfrac{3}{2}=x-\ln x-\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$，$x\in[1,+\infty)$

①当$x>2$时，

$F(x)>0\Leftrightarrow x^2-x\ln x-\dfrac{5}{2}x+3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}>0\Leftrightarrow x^2-x\ln x-\dfrac{5}{2}x+3>\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

记$G(x)=x^2-x\ln x-\dfrac{5}{2}x+3(x>2)$，$G'(x)=2x-\ln x-\dfrac{7}{2}$

$G''(x)=2-\dfrac{1}{x}>0$，$\therefore G'(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增

又$G'(2)=\dfrac{1}{2}-\ln 2<0,G'(2.3)=1.1-\ln 2.3>0$

$\therefore$存在$x_0\in(2,2.3)$使得$G'(x_0)=0$，即$2x_0-\ln x_0-\dfrac{7}{2}=0$

当$x\in(2,x_0)$时，$G'(x)<0$，$G(x)$单调递减

当$x\in(x_0,2.3)$时，$G'(x)>0$，$G(x)$单调递增

$\therefore G(x)_{\min}=G(x_0)=x_0^2-x_0\ln x_0-\dfrac{5}{2}x_0+3=x_0^2-x_0(2x_0-\dfrac{7}{2})-\dfrac{5}{2}x_0+3=-x_0^2+x_0+3$

$\because H(x)=-x^2+x+3$在$(2,2.3)$上单调递减，$\therefore H(x)>H(2.3)=-2.3^2+2.3+3=0.01$

$\therefore G(x)_{\min}=G(x_0)=-x_0^2+x_0+3>0$

$\therefore G(x)>0$，又$\because \dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2-x}{x^2}<0$，

$\therefore x^2-x\ln x-\dfrac{5}{2}x+3>\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}$，即$F(x)>0$…………9 分

②当$x\in[1,2]$时，令$g(x)=x-\ln x$，$h(x)=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$，$x\in[1,2]$

于是$F(x)=g(x)+h(x)$，

$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}\geqslant 0$，$g(x)_{\min}=g(1)=1$

又 $h'(x)=-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}=\frac{-3x^2-2x+6}{x^4}$

设 $\varphi(x)=-3x^2-2x+6$，则 $\varphi(x)$ 在 $x\in[1,2]$ 上单调递减，又 $\varphi(1)=1$，$\varphi(2)=-10$，

$\therefore$ 存在 $x_0\in[1,2]$，使得 $\varphi(x_0)=0$，且 $1<x<x_0$ 时，$\varphi(x)>0$；$x_0<x<2$ 时，$\varphi(x)<0$

$\therefore h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,2)$ 上单调递减

又 $h(1)=-\frac{1}{2}$，$h(2)=-1$，$\therefore h(x)_{\min}=h(2)=-1$

$\therefore F(x)=g(x)+h(x)>g(1)+h(2)=1+(-1)=0$．

综上①②，故 $F(x)>0$，即 $f(x)>f'(x)+\frac{3}{2}$ 对于任意的 $x\in[1,+\infty)$ 成立……………12 分