

数学参考答案

一、选择题

1. C 【解析】因为 $M = \{x | 1 - x > 0\} = \{x | x < 1\}$, $N = \{y | y > 0\}$, 所以

$$M \cap N = \{x | 0 < x < 1\}.$$

2. B 【解析】由题意得 $\cos \alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}$, 所以

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{7}{9}.$$

3. A 【解析】由已知得 $f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$, 所以 $f'(1) = a + b = 1$, 故 $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{1}{2}$,

当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取等号, 所以 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

4. D 【解析】因为 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 将 $y = \sin 2x$ 的

图象向右平移 φ 个单位长度后, 得到 $y = \sin[2(x - \varphi)] = \sin(2x - 2\varphi)$ 的图象, 所以

$$-2\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}), \text{ 故 } \varphi = -k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}), \text{ 又 } \varphi > 0, \text{ 所以 } k = -1, -2, -3, \dots,$$

$$\text{当 } k = -1 \text{ 时, } \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

5. D 【解析】由题图得 $f(0) = \sin \varphi = \frac{1}{2}$, 又 $0 < \varphi < \pi$, 点 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ 在图象的上升部分上,

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 由五点作图法可知 $2\omega \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$, 则 $\omega = 1$, 所以

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right). \text{ 对于 A, } f(x) \text{ 的最小正周期为 } \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故 A 错误, 对于 B,}$$

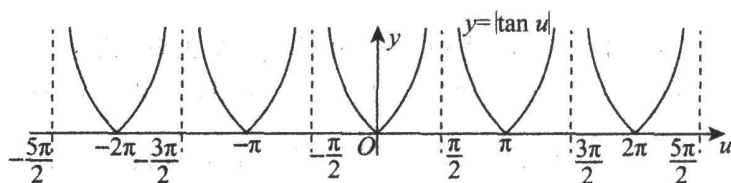
因为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, 所以 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$

对称; 故 B 错误, 对于 C, 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$, 所以

$-\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{2}$, 故 C 错误; 对于

D, $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{6}$ 对称, 故 D 正确.

6. C 【解析】作出函数 $y = |\tan u|$ 的图象, 如图所示:



由图可知, 函数 $y = |\tan u|$ 的最小正周期为 π , 且其单调递增区间为

$\left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$ 对于函数 $f(x)$, 其最小正周期为 $T = \frac{\pi}{\omega} = 4$, 可得 $\omega = \frac{\pi}{4}$, 则

$f(x) = \left| \tan\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) \right|$. 由 $k\pi < \frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 得,

$4k + 1 < x < 4k + 3 (k \in \mathbb{Z})$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(4k + 1, 4k + 3) (k \in \mathbb{Z})$, 所以

$f(x)$ 在区间 $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ 上单调递减, 在区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 上不单调, 在区间 $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$ 上单调递增,

在区间 $(3, 4)$ 上单调递减.

7. B 【解析】 $\tan \angle ABC = \tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. 在

Rt $\triangle ABC$ 中, $BC = \frac{AC}{\tan \angle ABC} = (2 + \sqrt{3})AC$. 在 Rt $\triangle ADC$ 中,

$CD = \frac{AC}{\tan \angle ADC} = \frac{AC}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}AC$. 由 $BD = BC - CD = (2 + \sqrt{3})AC - \frac{\sqrt{3}}{3}AC$

$= \left(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)AC = a$, 得 $AC = \frac{3a}{6 + 2\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}a$.

8. C 【解析】不等式 $\sin x + \cos x > 2mx + |\sin x - \cos x|$ 可化为 $\min\{\sin x, \cos x\} > mx$. 由

函数 $y = \min\{\sin x, \cos x\}$ 的图象, 可知 $\min\{\sin x, \cos x\} > mx$ 只有一个整数解, 则

唯一整数解只能是 $x=1$ 。因为点 $A(1, \cos 1)$, $B(2, \cos 2)$ 是 $y = \min\{\sin x, \cos x\}$ 图象

上的点, 所以 $\frac{\cos 2}{2} \leq m < \cos 1$, 因为 $\frac{2\cos 2}{3} \notin \left[\frac{\cos 2}{2}, \cos 1\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \left[\frac{\cos 2}{2}, \cos 1\right)$,

$\frac{\cos 2}{3} \in \left[\frac{\cos 2}{2}, \cos 1\right)$, $\cos 1 \notin \left[\frac{\cos 2}{2}, \cos 1\right)$, 所以实数 m 的可能取值为 $\frac{\cos 2}{3}$.

二、选择题

9. AC 【解析】若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $A+B > \frac{\pi}{2}$, 即

$A > \frac{\pi}{2} - B$, 又 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{\pi}{2} - B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin A > \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$; 反之,

若 B 为钝角, 满足 $\sin A > \cos B$, 不能推出 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 故 A 正确; 由

$\sin 2A = \sin 2B$, 得 $2A = 2B$ 或 $2A + 2B = \pi$, 即 $A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\triangle ABC$ 为

等腰三角形或直角三角形, 故 B 错误; 若 $A > B$, 则 $a > b$, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

即 $\sin A > \sin B$ 成立, 故 C 正确; 根据余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 即

$b^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \frac{1}{2} = 84$, 所以 $b = 2\sqrt{21}$ 符合条件的 $\triangle ABC$ 只有一个, 故 D

错误.

10. ACD 【解析】对于 A, 因为 $-2 \leq f(x) \leq 2$, 所以 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4$,

所以 $M \geq 4$, 故 A 正确, 对于 B, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 即

$2\cos\left(2x_1 + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2x_2 + \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $2x_1 + \frac{\pi}{3} = 2x_2 + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ 或

$2x_1 + \frac{\pi}{3} = -\left(2x_2 + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 即 $x_1 = x_2 + k\pi$ 或 $x_1 + x_2 = k\pi - \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$,

故 B 错误; 对于 C, 因为 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称, 又 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{6}$, 即

$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{12}$, 所以 $f(x_1) = -f(x_2)$, 所以 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 故 C 正确; 对于 D,

因为 $x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$, 且 $f(x_1) = f(x_2) (x_1 \neq x_2)$, 由 $f(x)$ 的, 图象在区间 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$

内的对称轴为直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 可知, $x_1 + x_2 = \frac{2\pi}{3}$, 所以

$$f(x_1 + x_2) = f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1, \text{ 故 D 正确.}$$

11. BC【解析】 $\text{versin} \frac{16\pi}{3} = 1 - \cos \frac{16\pi}{3} = 1 - \cos\left(5\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$, 故 A 错误;

$$\text{versin}(\pi - \theta) - \text{coversin}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = 1 - \cos(\pi - \theta) - 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\cos \theta - \cos \theta = 0, \text{ 故 B 正确; } \frac{\text{coversin } x - 1}{\text{versin } x - 1} = \frac{1 - \sin x - 1}{1 - \cos x - 1} = \tan x = 2,$$

$$\frac{\text{coversin } x + \text{versin } x}{2 - (\text{coversin } x + \text{versin } x)} = \frac{1 - \sin x - 1 + \cos x}{2 - (1 - \sin x + 1 - \cos x)} = \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}, \text{ 分子分母}$$

$$\text{同除以 } \cos x, \text{ 得 } \frac{\text{coversin } x + \text{versin } x}{2 - (\text{coversin } x + \text{versin } x)} = \frac{-\tan x + 1}{\tan x + 1} = \frac{-2 + 1}{2 + 1} = -\frac{1}{3}, \text{ 故 C 正确,}$$

$$f(x) = \text{versin}\left(2022x - \frac{\pi}{3}\right) + \text{coversin}\left(2022x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 -$$

$$\cos\left(2022x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 - \sin\left(2022x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 - 2\sin\left(2022x + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{当 } \sin\left(2022x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \text{ 时, } f(x) \text{ 取得最大值 } 4, \text{ 故 D 错误.}$$

12. AC【解析】由 $f(2) - f(1) = 2$, 得 $\cos 2\alpha - \cos \alpha + 0$, 即 $2\cos^2 \alpha - \cos \alpha = 0$,

解得 $\cos \alpha = 0$ 或 $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, 又 $0 \leq \alpha < \pi$, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha = \frac{\pi}{3}$. 当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时,

$$f'(x) = 2x - \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} x, \text{ 所以 } f'(0) = 0, \text{ 令 } g(x) = 2x - \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} x, \text{ 则}$$

$$g'(x) = 2 - \frac{\pi^2}{9} \cos \frac{\pi}{3} x > 0, \text{ 所以 } f'(x) \text{ 单调递增, 则当 } x \in [-2, 0) \text{ 时, } f'(x) < 0, \text{ 当}$$

$x \in (0, 2]$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-2, 0)$ 上单调递减, 在区间 $(0, 2]$ 上单调递

增, 故 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上只有 1 个极值点, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) = 2x - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x$.

$$\text{令 } h(x) = 2x - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x, \text{ 则 } h'(x) = 2 - \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} x \text{ 在区间 } [0, 2] \text{ 上单调递增, 又}$$

$h'(0) = 2 - \frac{\pi^2}{4} < 0$, $h'(2) = 2 + \frac{\pi^2}{4} > 0$, 所以 $h'(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上只有一个零点, 因此

此 $f'(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上先单调递减再单调递增. 又 $f'(0) = 0$, $f'(2) > 0$, 所以 $f(x)$ 在

区间 $[0, 2]$ 上先单调递减再单调递增. 由 $f(x)$ 为偶函数可知 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上先单

调递减, 然后单调递增, 再单调递减, 最后单调递增, 故 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上共有 3

个极值点, 综上, $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上有 1 个或 3 个极值点.

三、填空题

13. $\sqrt{3} + 1$ 【解析】因为 $2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\alpha$, 所以 $2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} - 2\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3} = \cos\alpha$,

整理得 $\sin\alpha = (\sqrt{3} + 1)\cos\alpha$, 即 $\tan\alpha = \sqrt{3} + 1$.

14. 1 【解析】因为 $f(4-x) + f(x) = 2$, 所以 $f(4-2) + f(2) = 2f(2) = 2$, 所以

$f(2) = 1$. 又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = 4$ 对称, 所以 $f(6) = f(2) = 1$. 又

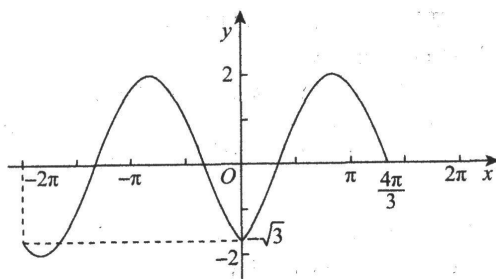
$f(4+2) + f(-2) = 2$, 所以 $f(-2) = 2 - f(6) = 1$.

15. $[-\sqrt{3}, 0)$ 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(-x) = \sin|-x| - \sqrt{3}\cos(-x) = \sin|x| -$

$\sqrt{3}\cos x = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x =$

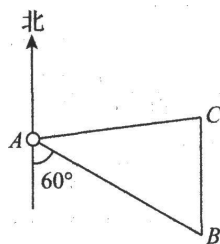
$2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 作出 $f(x) = \sin|x| - \sqrt{3}\cos x$ 在区间 $\left[-2\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$ 上的大致图象如图所

示.



若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 在区间 $\left[-2\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$ 上有三个不同的实根, 则 $m \in [-\sqrt{3}, 0)$.

16. $\frac{5}{2}$ 【解析】如图, A 点为某市的位置, B 点是台风中心在向正北方向移动前的位置.



设台风移动 t 小时后的位置为 C ，则 $BC = 40t$ 。又 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $AB = 400$ ，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 60^\circ = 400^2 + (40t)^2 - 16000t$ 。令 $AC^2 = 400^2 + (40t)^2 - 16000t \leq 350^2$ ，即 $16t^2 - 160t + 375 \leq 0$ ，解得 $\frac{15}{4} \leq t \leq \frac{25}{4}$ ，则 $\frac{25}{4} - \frac{15}{4} = \frac{5}{2}$ （小时），所以该市从受到台风影响到影响结束，持续的时间为 $\frac{5}{2}$ 小时。

四、解答题

17. 解：(1) 因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0) = 0$ 。（1分）

当 $x < 0$ 时， $-x > 0$ ，则 $f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) = x^2 - 4x$ 。

因为 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(x) = -f(-x) = -x^2 + 4x$ ，

所以 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0, \\ -x^2 + 4x, & x < 0 \end{cases}$ （5分）

(2) 当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$ ，则 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增。

因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增。（7分）

由 $f(t+1) + f(2t) > 0$ ，可得 $f(t+1) > -f(2t) = f(-2t)$ （8分）

所以 $t+1 > -2t$ ，解得 $t > -\frac{1}{3}$ 。

故实数 t 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 。（10分）

18. 解：(1) 若选①：由正弦定理，得 $(b+c)(b-c) = (a-c)a$ ，

整理得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$ （3分）

$$\text{所以 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}. \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{若选②: 因为 } \cos 2(A+C) + 3\cos B = \cos 2(\pi - B) + 3\cos B = \cos 2B + 3\cos B = 1,$$

$$\text{所以 } 2\cos^2 B - 1 + 3\cos B = 1,$$

$$\text{即 } 2\cos^2 B + 3\cos B - 2 = 0, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } \cos B = -2 \text{ (舍去) 或 } \cos B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3} \quad (5 \text{ 分})$$

(2) 因为 $BD \perp AC$, 所以 BD 为 AC 边上的高,

又 $AC = 4$, 所以当 $\triangle ABC$ 的面积最大时, BD 取得最大值.

法一: 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle ABC$,

$$\text{即 } 16 = a^2 + c^2 - ac \quad (8 \text{ 分})$$

由基本不等式, 得 $16 \geq 2ac - ac = ac$, 当且仅当 $a = c = 4$ 时取等号,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin \angle ABC \leq 4\sqrt{3} \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } AC \text{ 边上的高 } BD \text{ 的最大值为 } \frac{4\sqrt{3}}{\frac{1}{2}b} = 2\sqrt{3}, \quad (12 \text{ 分})$$

$$\text{法二: 由正弦定理, 得 } \sin A = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin \angle ABC} = \frac{8\sqrt{3}}{3}, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin A \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin C \sin \angle ABC =$$

$$16\sqrt{3} \sin A \sin \left(\frac{2\pi}{3} - A \right) = 8\sqrt{3} \sin \left(2A - \frac{\pi}{6} \right) \frac{4\sqrt{3}}{3} \leq 4\sqrt{3}, \text{ 当 } A = \frac{\pi}{3} \text{ 时, 等号成立,}$$

$$\text{所以 } AC \text{ 边上的高 } BD \text{ 的最大值为 } \frac{4\sqrt{3}}{\frac{1}{2}b} = 2\sqrt{3}. \quad (12 \text{ 分})$$

19. 解: (1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2} \cos 2\omega x = \sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$, (2 分)

设 $f(x)$ 的周期为 T , 由题意得 $\left(\frac{T}{2}\right)^2 + 4 = 4 + \frac{\pi^2}{4}$, 即 $\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$, 解得 $\omega = 1$,

(4 分)

所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$. (5 分)

(2) 由 $f(\angle BAC) = 1$, 得 $\sin\left(2\angle BAC - \frac{\pi}{6}\right) = 1$,

即 $2\angle BAC - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$,

解得 $\angle BAC = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$,

因为 $\angle BAC \in (0, \pi)$, 所以 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$. (7 分)

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 得 $\frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}c \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}b \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{6}$,

所以 $AD = \frac{\sqrt{3}bc}{b+c}$. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle BAC = (b+c)^2 - 3bc$,

即 $16 = (b+c)^2 - 36$, 则 $(b+c)^2 = 52$, 即 $b+c = 2\sqrt{13}$,

故 $AD = \frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{39}}{13}$ (12 分)

20. 解: (1) 由题得 $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}c}{b \cos A}$,

等式左边 $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin C}{\cos A \cos B}$,

由正弦定理, 得 $\frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \frac{\sqrt{3} \sin C}{\sin B \cos A}$ (2 分)

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C \neq 0$,

所以 $\sin B = \sqrt{3} \cos B$, 即 $\tan B = \sqrt{3}$ (4 分)

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$. (5 分)

(2) 因为 $AD = BD$, 所以 $\angle ABD = \angle BAD$.

设 $\angle ABD = \angle BAD = \theta$, 则 $\angle BDC = 2\theta$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理, 得 $\frac{BC}{\sin \theta} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$, 则 $BC = \frac{4 \sin \theta}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin \theta$

(7 分)

在 $\triangle BDC$ 中, 由余弦定理, 得 $BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cos 2\theta = 10 - 6 \cos 2\theta$.

(9 分)

故 $\frac{64}{3} \sin^2 \theta = 10 - 6 \cos 2\theta = 10 - 6(1 - 2 \sin^2 \theta)$,

解得 $\sin^2 \theta = \frac{3}{7}$, 即 $\sin^2 A = \frac{3}{7}$. (11 分)

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A = \frac{\sqrt{21}}{7}$. (12 分)

21. (1) 证明: 设 $AM = x_1$, $MB = y_1$, $AN = x_2$, $NC = y_2$, 连接 OA, OB, OC .

在 $\triangle AMO$ 和 $\triangle BMO$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos \angle AMO = \frac{x_1^2 + OM^2 - OA^2}{2x_1 \cdot OM}$,

$\cos \angle BMO = \frac{y_1^2 + OM^2 - OB^2}{2y_1 \cdot OM}$ (2 分)

由 O 是 $\triangle ABC$ 的外心知 $OA = OB$,

又 $\cos \angle AMO + \cos \angle BMO = 0$,

所以 $\frac{x_1^2 + OM^2 - OA^2}{2x_1 \cdot OM} + \frac{y_1^2 + OM^2 - OB^2}{2y_1 \cdot OM} = 0$,

即 $(x_1 y_1 + OM^2 - OA^2)(x_1 + y_1) = 0$. (4 分)

因为 $x_1 + y_1 \neq 0$, 所以 $x_1 y_1 = OA^2 - OM^2$

同理可得 $x_2 y_2 = OA^2 - ON^2$,

因为 $OM = ON$, 所以 $x_1 y_1 = x_2 y_2$.

故 $AM \cdot MB = AN \cdot NC$. (6 分)

(2)解: 在 $\triangle AMO$ 和 $\triangle AON$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos \angle AOM = \frac{OA^2 + OM^2 - x_1^2}{2OA \cdot OM}$,

$$\cos \angle AON = \frac{OA^2 + OM^2 - x_2^2}{2OA \cdot OM}.$$

由 $\cos \angle AOM + \cos \angle AON = 0$, 得 $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

设 $\mu = \frac{x_1}{y_1}$, $\lambda = \frac{x_2}{y_2}$.

由(1)知 $x_1 y_1 = x_2 y_2 = 2$, 则 $\mu + \lambda = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = 4$ (9分)

$$\text{所以 } \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} = \frac{x_1 x_2}{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)} =$$

$$\frac{\mu \lambda}{(\mu + 1)(\lambda + 1)} = \frac{1}{1 + \frac{5}{\mu \lambda}} \leq \frac{1}{1 + \frac{5}{\left(\frac{\mu + \lambda}{2}\right)^2}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{4}} = \frac{4}{9}, \text{ 当且仅当 } \mu = \lambda = 2 \text{ 时取等号,}$$

故 $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}$ 的最大值为 $\frac{4}{9}$. (12分)

22. 解: (1)当 $a = -1$ 时, $f(x) = e^x \sin x - x$,

$$\text{则 } f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x - 1 = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1. \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1,$$

$$\text{所以 } 1 \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{又 } e^x \geq 1, \text{ 所以 } \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1, \text{ 故 } f'(x) \geq 0,$$

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0) = 0$. (4分)

(2)由 $f(x) = e^x \sin x + ax, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 得 $f(0) = 0$,

则 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且只有 1 个零点.

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + a$, 令 $h(x) = e^x \sin x + e^x \cos x + a, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则

$h'(x) = 2e^x \cos x \geq 0$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立,

所以 $f'(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增,

故 $f(x)_{\min} = f(0) = 1 + a$, $f'(x)_{\max} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + a$. (6 分)

当 $a \geq -1$ 时, $f'(x) \geq f'(0) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区

间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上无零点, 不符合题意, 舍去;

当 $a \leq -e^{\frac{\pi}{2}}$ 时, $f'(x) \leq f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0$, 则 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 所以 $f(x)$

在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上无零点, 不符合题意, 舍去; (8 分)

当 $-e^{\frac{\pi}{2}} < a < -1$ 时, $f'(0) = 1 + a < 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + a > 0$,

则 $f'(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上只有 1 个零点, 设为 x_0 .

当 $x \in [0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in \left(x_0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

又 $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}a$, 要使 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有且只有一个零点, 则

$$e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}a \geq 0, \text{ 所以 } -\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}} \leq a < -1.$$

综上, 实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}}, -1\right)$. (12 分)

