

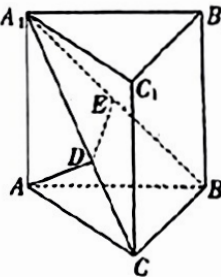
高三数学试卷

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 2 - x < 1\}$, $B = \{x | |x - 1| < 3\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $\{x | -2 < x < 1\}$ B. $\{x | x < 4\}$ C. $\{x | 1 < x < 4\}$ D. $\{x | x > -2\}$
2. 已知复数 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 且 $\frac{zi}{1+i} = 1 + 2i$, 则 $ab =$
 A. -9 B. 9 C. -3 D. 3
3. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , $M(m, 2)$ 在抛物线 C 上, 且 $|MF| = 4$, 则 $p =$
 A. 2 B. 4 C. 8 D. 12
4. 若 $a = \log_{0.3} 0.4$, $b = 1.2^{0.3}$, $c = \log_{2.1} 0.9$, 则
 A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $b > a > c$
5. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 则“ $a_4 + a_7 = 27(a_1 + a_4)$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 的公比为 3”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 如图, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = AB = 2$, D 在 A_1C 上, E 是 A_1B 的中点, 则 $(AD + DE)^2$ 的最小值是
 A. $6 - \sqrt{7}$ B. $2\sqrt{7}$
 C. $3 + \sqrt{7}$ D. $5 + \sqrt{7}$
7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(5+x)$, 且 $f(x+1)$ 是偶函数, 当 $1 \leq x \leq 3$ 时, $f(x) = 2^x + \frac{3}{4}$, 则 $f(\log_2 36) =$
 A. $\frac{3}{2}$ B. 3 C. $\frac{39}{8}$ D. $\frac{39}{4}$
8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$, 点 M 在双曲线 C 的右支上 $A(0, b)$, 若 $\triangle AMF$ 周长的最小值是 $2c + 4a$, 则双曲线 C 的离心率是
 A. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $\sqrt{3}+1$ C. $\frac{5}{2}$ D. 5



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 某商场开业期间举办抽奖活动，已知抽奖箱中有 30 张奖券，其中有 5 张写有“中奖”字样。假设抽完的奖券不放回，甲抽完之后乙再抽，记 A 表示甲中奖， B 表示乙中奖，则

- A. $P(AB) = \frac{2}{87}$ B. $P(B) = \frac{4}{29}$ C. $P(A|B) = \frac{4}{29}$ D. $P(B|A) = \frac{1}{6}$

10. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 9$ ，过点 $A(2, 0)$ 的直线 l 与圆 O 交于 M, N 两点，则

- A. 存在直线 l ，使得 $|MN| = 4$
 B. 使 $|MN|$ 的长为整数的直线 l 有 3 条
 C. 存在直线 l ，使得 $\triangle MON$ 的面积为 $\frac{9}{2}$
 D. 使 $\triangle MON$ 的面积为 4 的直线 l 有 2 条

11. 正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 3，高为 $\sqrt{6}$ ，则下列结论正确的是

- A. $AB \perp PC$
 B. 三棱锥 $P-ABC$ 的表面积为 $9\sqrt{3}$
 C. 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 27π
 D. 三棱锥 $P-ABC$ 的内切球的表面积为 $\frac{3\pi}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x > 0, \\ x^2-3x+1, & x \leq 0, \end{cases}$ 函数 $g(x) = f(f(x)) - m$ 恰有 5 个零点，则下列说法

正确的是

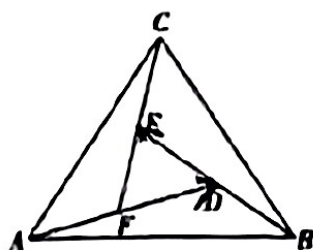
- A. $f(x)$ 有 2 个零点
 B. 若 $m=3$ ，则 $g(x)$ 有 4 个零点
 C. 若 $g(x)$ 只有 1 个零点，则 m 的取值范围是 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
 D. 若 $g(x)$ 恰有 5 个零点，则 m 的取值范围是 $[-1, 1)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13. 幸福指数是衡量人们对自身生存和发展状况的感受和体验，即人们的幸福感的一种指数。某机构从某社区随机调查了 10 人，得到他们的幸福指数（满分，10 分）分别是 7, 6, 8, 5, 7, 8, 9, 2, 8, 1, 9, 7, 9, 9, 5, 8, 3, 8, 8。则这组数据的中位数是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$

14. 若 $0 < \alpha < 4$ ，则 $\frac{2}{a} + \frac{8}{4-a}$ 的值可以是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

15. “赵爽弦图”是中国古代数学的图腾，它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的一个大正方形。如图，某人类比“赵爽弦图”，用 3 个全等的三角形和一个小等边三角形拼成一个较大的等边三角形。D, E, F 分别是 BE, CF, AD 的中点，若 $AB = 7$ ，则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} =$



$\underline{\quad \blacktriangle \quad}$

16. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega \in \mathbb{N}_+$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 满足 $f(\frac{\pi}{6}) = 0$, $f(\frac{11\pi}{12}) = 2$ ，且 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调。若关于 x 的方程 $f(x) = 1$ 在 $[m, n]$ ($m < n$) 上有 2023 个零点，则 $n - m$ 的最小值是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ 。

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

某杂志社对投稿的稿件要进行评审,评审的程序如下:先由两位专家进行初审.若两位专家的初审都通过,则予以录用;若两位专家的初审都不通过,则不予录用;若恰能通过 1 位专家的初审,则再由另外的两位专家进行复审,若两位专家的复审都通过,则予以录用,否则不予录用.假设投稿的稿件能通过各位专家初审的概率均为 $\frac{1}{3}$,复审的稿件能通过各位专家复审的概率均为 $\frac{1}{2}$,且每位专家评审结果相互独立.

(1)求投到该杂志的 1 篇稿件被录用的概率;

(2)记 X 表示投到该杂志的 3 篇稿件中被录用的篇数,求 X 的分布列及期望.

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $b \sin B - c \sin C = a$.

(1)证明: $B - C = \frac{\pi}{2}$.

(2)若 $A = \frac{\pi}{3}$, $a = 2\sqrt{3}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (12 分)

在① $2S_n = (n+1)a_n$, ② $(n-1)S_n = (n+1)S_{n-1}$ ($n \geq 2$) 这两个条件中任选一个,补充在下面问题中,并作答.

问题:设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 且 _____.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 $b_n = \frac{a_n}{n+1} + \frac{n+1}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

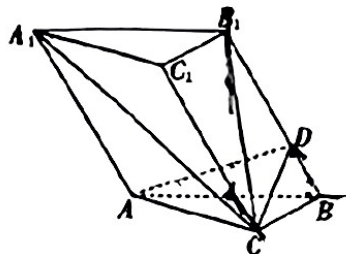
注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

1. (12分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,所有棱长均为 2,且 $B_1C = \sqrt{6}$, $\angle ABB_1 = 60^\circ$, $\overrightarrow{BB_1} = 3\overrightarrow{BD}$.

(1)证明:平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

(2)求平面 ACD 与平面 A_1B_1C 夹角的余弦值.



21. (12分)

椭圆 E 的中心为坐标原点,坐标轴为对称轴,左、右顶点分别为 $A(-2,0)$, $B(2,0)$,点 $(1, \sqrt{6})$ 在椭圆 E 上.

(1)求椭圆 E 的方程.

(2)过点 $(-1,0)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于 P, Q 两点(异于点 A, B),记直线 AP 与直线 BQ 交于点 M ,试问点 M 是否在一条定直线上?若是,求出该直线方程;若不是,请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x + mx^3 - nx^2 - x$ (其中 e 为自然对数的底数),且曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = -x$.

(1)求实数 m, n 的值;

(2)证明:对任意的 $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 3x^3 - 5x^2 + 1$ 恒成立.