

2023 年长安区高三年级第一次模考文科数学答案及评分标准

一、选择题:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	A	C	D	D	B	A	C	D	B	D

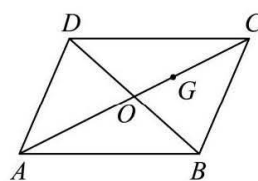
二、填空题

13. $\sqrt{21}$ 14. $2\sqrt{6}$ 15. -22 16. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}-1\right]$.

1. D 【详解】 $z = \frac{5}{2-i} + 3 = 5+i$, 则 $\bar{z} = 5-i$, 位于第四象限.

2. B 【详解】 因为集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 \leq 0\} = [-1, 6]$, 且 $\complement_{\mathbb{R}} B = (-\infty, 3]$, 所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = [-1, 3]$.

3. A 【详解】 如图, 设 AC 与 BD 相交于点 O , 由 G 为 $\triangle BCD$ 的重心, 可得 O 为 BD 的中点, $CG = 2GO$, 则



$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AO} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD},$$

可得 $x = y = \frac{2}{3}$, 故 $x - 2y = -\frac{2}{3}$.

4. C 【详解】 由程序框图可知, 输出的 $S = \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \dots + \log_2 \frac{i+1}{i} = 4$,

则 $\log_2(i+1) = 4$, 得 $i = 15$, 那么判断框图 $p = 15$.

5. D 【详解】 设 2 名男生为 a_1, a_2 , 3 名女生为 b_1, b_2, b_3 ,

从 5 人中选 2 人的总选法为 $(a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_3)$,

共 10 种不同选法, 则没有男生的选法共 3 种: $(b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_3)$, 故所求概率为 $P = \frac{3}{10}$.

6. D 【详解】 因为 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $\tan \alpha < -1$,

$$\text{由 } \cos^2 \alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) = \frac{1}{2}, \text{ 得 } \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = -\frac{1}{2},$$

所以 $\frac{1+2\tan \alpha}{1+\tan^2 \alpha} = -\frac{1}{2}$, 即 $\tan^2 \alpha + 4\tan \alpha + 3 = 0$, 解得 $\tan \alpha = -3$ 或 $\tan \alpha = -1$ (舍). $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 2$.

7. B 【详解】 如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中, $AM = \frac{AB}{\sin 15^\circ}$, 在 $\triangle ACM$ 中, $\angle CAM = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$,

$\angle AMC = 180^\circ - 15^\circ - 60^\circ = 105^\circ$, 所以 $\angle ACM = 30^\circ$, 由正弦定理 $\frac{AM}{\sin \angle ACM} = \frac{CM}{\sin \angle CAM}$,

可得 $CM = \frac{\sin \angle CAM}{\sin \angle ACM} \cdot AM = \frac{\sqrt{2}AB}{\sin 15^\circ}$, 又由 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$,

在 $\text{Rt}\triangle CDM$ 中, 可得 $CD = CM \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{6}AB}{2 \sin 15^\circ} = \frac{6\sqrt{6}}{2 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} \approx 28.2$.

8. A 【详解】由 $a > b > 0, a + b = 1$ 可 $0 < b < \frac{1}{2} < a < 1$, $z = \log_{\left(\frac{1}{a+b}\right)} ab = \log_{\frac{a+b}{ab}} ab = \log_{\frac{1}{ab}} ab = -1$,
而 $y = \log_{\frac{1}{b}} a = -\log_b a$, 因为 $0 < b < 1$, 所以 $\log_b a < \log_b b = 1, y = -\log_b a > -1 = z$, 而 $x < -1$,
所以顺序为 $x < z < y$.

9. C 【详解】 $f(x) = \cos(3x + \varphi)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 所以 $3 \times \frac{\pi}{4} + \varphi = k\pi (k \in \mathbb{Z})$,

得 $\varphi = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $k = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$, 所以 $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$,

对于 A: $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left[3\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = -\sin 3x$, 所以 $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 为奇函数成立, 故选项 A 不

正确;

对于 B: $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $3x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$, 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上不是单调函数; 故选项 B 不

正确;

对于 C: 因为 $f(x)_{\max} = 1, f(x)_{\min} = -1$, 又因为 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$, 所以 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为半个周期, 即 $\frac{2\pi}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, 故选项 C 正确;

对于 D: 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得 $y = \cos\left[3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right] = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin 3x$,

故选项 D 不正确;

10. D 【详解】由球的半径为 r , 可知圆柱的底面半径为 r , 圆柱的高为 $2r$, 则球表面积

为 $4\pi r^2$, 圆柱的表面积 $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2$, 所以球与圆柱的表面积之比为 $\frac{2}{3}$, 故 A 正确;

由题可知四面体 $CDEF$ 的体积等于 $2V_{E-DCO_1}$, 点 E 到平面 DCO_1 的距离 $d \in (0, 2]$,

又 $S_{\triangle DCO_1} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$, 所以 $2V_{E-DCO_1} = \frac{2}{3} \times 8d \in (0, \frac{32}{3}]$, 故 B 正确;

由题可知点 P 在过球心与圆柱的底面平行的截面圆上,

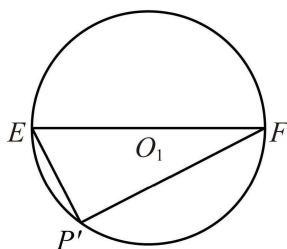
设 P 在底面的射影为 P' , 则

$$PP' = 2, PE = \sqrt{2^2 + P'E^2}, PF = \sqrt{2^2 + P'F^2}, P'E^2 + P'F^2 = 16,$$

$$\text{设 } t = P'E^2, \text{ 则 } t \in [0, 4^2], PE + PF = \sqrt{2^2 + t} + \sqrt{2^2 + 16 - t},$$

$$\text{所以 } (PE + PF)^2 = (\sqrt{2^2 + t} + \sqrt{2^2 + 16 - t})^2 = 24 + 2\sqrt{-t^2 + 16t + 80}$$

$$= 24 + 2\sqrt{-(t-8)^2 + 144} \in [24 + 8\sqrt{5}, 48], \text{ 所以 } PE + PF \in [2 + 2\sqrt{5}, 4\sqrt{3}], \text{ 故 C 正确.}$$

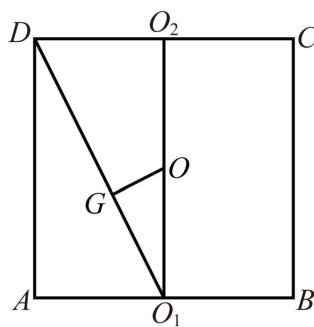


过 O 作 $OG \perp DO_1$ 于 G , 则由题可得 $OG = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times 4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

设 O 到平面 DEF 的距离为 d_1 , 平面 DEF 截得球的截面圆的半径为 r_1

$$\text{则 } d_1 \leq OG, r_1^2 = r^2 - d_1^2 = 4 - d_1^2 \geq 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5},$$

所以平面 DEF 截得球的截面面积最小值为 $\frac{16}{5}\pi$, 故 D 错误;



11. B 【详解】

$$|AB|^2 = |AF|^2 + |BF|^2 - 2|AF||BF|\cos 60^\circ = (|AF| + |BF|)^2 - 3|AF||BF|$$

在 $\triangle ABF$ 中,

$$\geq (|AF| + |BF|)^2 - 3\left(\frac{|AF| + |BF|}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(|AF| + |BF|)^2,$$

$$d = \frac{|AF| + |BF|}{2}, \text{ 易得 } \frac{|AB|}{d} \geq 1.$$

12. D 【详解】对于 A, 令 $x = y = 0$, 则由 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$ 可得 $2f(0) = 2f^2(0)$,

故 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$, 故 A 不正确;

对于 B, 当 $f(0) = 0$ 时, 令 $y = 0$, 则 $f(x) + f(x) = 2f(x) \cdot f(0) = 0$, 则 $f(x) = 0$, 故 $f'(x) = 0$,

函数 $f'(x)$ 既是奇函数又是偶函数;

当 $f(0) = 1$ 时, 令 $x = 0$, 则 $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, 所以 $f(-y) = f(y)$, $f(x)$ 为偶函数, 则

$f'(x)$ 为奇函数；综合以上可知 $f'(x)$ 必为奇函数，B 不正确；

对于 C，令 $x=y$ ，则 $f(2x)+f(0)=2f^2(x)$ ，故 $f(2x)+f(0)\geq 0$ 。

由于 $x\in\mathbf{R}$ ，令 $t=2x, t\in\mathbf{R}$ ，即 $f(t)+f(0)\geq 0$ ，即有 $f(x)+f(0)\geq 0$ ，故 C 不正确；

对于 D，若 $f(1)=\frac{1}{2}$ ，令 $x=1, y=0$ ，则 $f(1)+f(1)=2f(1)\cdot f(0)$ ，则 $f(0)=1$ ，

故令 $x=y=1$ ，则 $f(2)+f(0)=2f^2(1)$ ，即 $f(2)+1=\frac{1}{2}$ ， $\therefore f(2)=-\frac{1}{2}$ ，

令 $x=2, y=1$ ，则 $f(3)+f(1)=2f(2)\cdot f(1)$ ，即 $f(3)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ ， $\therefore f(3)=-1$ ，

令 $x=3, y=1$ ，则 $f(4)+f(2)=2f(3)\cdot f(1)$ ，即 $f(4)-\frac{1}{2}=-1$ ， $\therefore f(4)=-\frac{1}{2}$ ，

令 $x=4, y=1$ ，则 $f(5)+f(3)=2f(4)\cdot f(1)$ ，即 $f(5)-1=-\frac{1}{2}$ ， $\therefore f(5)=\frac{1}{2}$ ，

令 $x=5, y=1$ ，则 $f(6)+f(4)=2f(5)\cdot f(1)$ ，即 $f(6)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ， $\therefore f(6)=1$ ，

令 $x=6, y=1$ ，则 $f(7)+f(5)=2f(6)\cdot f(1)$ ，即 $f(7)+\frac{1}{2}=1$ ， $\therefore f(7)=\frac{1}{2}$ ， \dots

由此可得 $f(n), n\in\mathbf{N}^*$ 的值有周期性，且 6 个为一周期，且

$$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=0，$$

故 $\sum_{n=1}^{2023} f(n)=337\times[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)]+f(1)=\frac{1}{2}$ ，故 D 正确。

13. 【详解】因为 $\sin C=2\sin B\cos(B+C)$ ，所以 $c=-2b\cos A$ ，所以 $c=2b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}b$ 。

$$b=\sqrt{3}, c=3，由余弦定理 a=\sqrt{21}$$

14. 【详解】圆 $C:x^2+(y-1)^2=16$ 的圆心 $C(0,1)$ ，半径 $r=4$ ，

直线 $l:mx-y+1-3m=0\Rightarrow m(x-3)-y+1=0$ 过定点 $M(3,2)$ ，并在圆 C 内，

$\therefore|PQ|$ 最长为直径，最短 PQ 时，点 $M(3,2)$ 为弦 PQ 的中点，即 $CM\perp PQ$ 时，算得 $|PQ|=2\sqrt{6}$ 。

15. 【详解】由 $2x^3-ax^2+1=0$ 可得 $a=2x+x^2$ ，令 $g(x)=2x+x^2$ ， $g'(x)=2+2x^3$ ，

当 $g'(x)=0$ 时， $x=1$ 。当 $0<x<1$ 时 $g(x)$ 单调减，当 $x>1$ 时 $g(x)$ 单调递增，

所以当 $x=1$ 时 $g(x)$ 有最小值 $g(1)=3$, 即 $a=3$.

函数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$, 则 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$, 当 $f'(x)=0$ 时, $x_1=0, x_2=1$.

当 $-2 < x < 0$ 时 $g(x)$ 单调递增, 当 $0 < x < 1$ 时 $g(x)$ 单调递减, 当 $1 < x < 2$ 时 $g(x)$ 单调递增.

因此 $f(-2)=-27, f(0)=1, f(1)=0, f(2)=5$, 故函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 5, 最小值为 -27,

最大值与最小值的和为 -22.

16. 【详解】设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点为 F_1 , 因为 $AF \perp BF$, 所以四边形 AF_1BF 为矩形, 所以 $AB=F_1F=2c$. 因为 $\angle ABF = \alpha$, 所以 $AF = 2c \sin \alpha, BF = 2c \cos \alpha$, 由椭圆的定义得

$$2a = 2c \sin \alpha + 2c \cos \alpha, \text{ 所以 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}. \text{ 因为, } \alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{所以 } \alpha + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right), \text{ 所以 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, 1\right], \text{ 所以 } e \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3} - 1\right].$$

17. 【详解】(1) 证明: 因为 $a_{n+1} = a_n^2, a_1 = 100 > 0$, 所以 $\lg a_{n+1} = \lg a_n^2$,

$$\text{即 } \lg a_{n+1} = 2 \lg a_n, b_{n+1} = 2b_n \text{-----3 分}$$

又因为 $b_1 = 2$, 所以 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 所以 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^n$ -----6 分

$$(2) \log_2 b_n = n, \text{ 则 } c_n = n + (n+1) + (n+2) + \dots + 2n = \frac{(n+1)(n+2n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{c_n} = \frac{2}{3n(n+1)} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \text{-----9 分}$$

$$\therefore S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{3(n+1)}$$

-----12 分

18. 【详解】(1) 证明 $\because AB=AC$ 且 O 为 BC 的中点, $\therefore AO \perp BC$,

又 $A'O \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 $ABC, \therefore A'O \perp BC$,

$\because AO \cap A'O = O, AO, A'O \subset$ 平面 AOA' . 故 $BC \perp$ 平面 AOA' , 又 $BC \subset$ 平面 $BCC'B'$,

\therefore 平面 $BCC'B' \perp$ 平面 AOA' -----6 分

(2) 设点 A 到平面 $B'BC$ 的距离为 h , $S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, $OA' = 3$ -----8 分

$$AA' = 2\sqrt{3}, AB = 2, A'B = \sqrt{10}, \cos \angle A'AB = \frac{\sqrt{3}}{4}, \sin \angle A'AB = \frac{\sqrt{13}}{4}, S_{\triangle A'AB} = \frac{\sqrt{39}}{2} \text{-----11 分}$$

根据等体积公式可得 $V_{C-A'AB} = \frac{1}{3}S_{\triangle A'AB} \times h = V_{A'-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \times OA'$, 解得 $h = \frac{6\sqrt{13}}{13}$ -----12 分

19. 【详解】(1) 由频率直方图得到: 需求量为 110 的频率 $= 0.005 \times 20 = 0.1$, 需求量为 130 的频率 $= 0.01 \times 20 = 0.2$,

需求量为 150 的频率 $= 0.015 \times 20 = 0.3$, 需求量为 170 的频率 $= 0.0125 \times 20 = 0.25$, 需求量为 190 的频率 $= 0.0075 \times 20 = 0.15$, \therefore 这个开学季内市场需求量 X 的众数是 150, -----2 分

这个开学季内市场需求量 X 的平均数: $\bar{x} = 110 \times 0.1 + 130 \times 0.2 + 150 \times 0.3 + 170 \times 0.25 + 190 \times 0.15 = 153$.

-----4 分

(2) \because 每售出 1 盒该产品获利润 50 元, 未售出的产品, 每盒亏损 30 元,

\therefore 当 $100 \leq x \leq 160$ 时, $y = 50x - (160 - x) \cdot 30 = 80x - 4800$, -----6 分

当 $160 < x \leq 200$ 时, $y = 160 \times 50 = 8000$, -----8 分

$$\therefore y = \begin{cases} 80x - 4800, & 100 \leq x \leq 160 \\ 8000, & 160 < x \leq 200 \end{cases} \text{-----9 分}$$

(3) \because 利润不少于 4800 元, $\therefore 80x - 4800 \geq 4800$, 解得 $x \geq 120$,

\therefore 由(I)知利润不少于 4800 元的概率 $p = 1 - 0.1 = 0.9$. -----12 分

20. 【详解】(1) 由题意可知, $\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2a = 2\sqrt{6} \end{cases}$, 解得 $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, 所以 C 的标准方程为: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$.

-----4 分

(2) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $y = \frac{1}{3}x + m (m \neq 0)$,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{1}{3}x + m \\ \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{得} \frac{2}{3}x^2 - 2mx - 3m^2 - 6 = 0,$$

\because 直线 MN 与 C 相交于 M, N 两点, $\therefore \Delta = (-2m)^2 - 4 \times \frac{2}{3}(-3m^2 - 6) = 12m^2 + 16 > 0$,

则 $x_1 + x_2 = 3m$. -----6 分

由题意知, $Q(-3, -1)$, 当直线 PM , QN 的斜率均存在时,

$$k_{PM} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 3} = \frac{\frac{1}{3}x_1 + m - 1}{x_1 - 3} = \frac{1}{3} + \frac{m}{x_1 - 3}, \quad k_{QN} = \frac{y_2 + 1}{x_2 + 3} = \frac{\frac{1}{3}x_2 + m + 1}{x_2 + 3} = \frac{1}{3} + \frac{m}{x_2 + 3},$$

所以直线 PM 的方程为 $y - 1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{m}{x_1 - 3}\right)(x - 3)$, 直线 QN 的方程为

$$y + 1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{m}{x_2 + 3}\right)(x + 3). \quad \text{-----8分}$$

两方程联立得, $x_0 = -\frac{3(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2 - 6} = -\frac{9m}{x_1 - x_2 - 6}$, 显然 $x_0 \neq 0$, 又 $y_0 = \left(\frac{1}{3} + \frac{m}{x_1 - 3}\right)x_0 - \frac{3m}{x_1 - 3}$,

$$\text{所以 } \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{3} + \frac{m}{x_1 - 3} + \frac{3m}{x_1 - 3} \times \frac{x_1 - x_2 - 6}{9m} = \frac{1}{3} + \frac{m}{x_1 - 3} + \frac{x_1 - x_2 - 6}{3(x_1 - 3)} = \frac{1}{3} + \frac{2(x_1 - 3)}{3(x_1 - 3)} = 1, \quad \text{-----10分}$$

当直线 PM 的斜率不存在时, 易求得直线 PM 的方程为 $x = 3$, 直线 QN 的方程为 $y = \frac{2}{3}x + 1$,

则 $x_0 = 3$, $y_0 = 3$, 所以 $\frac{y_0}{x_0} = 1$.

当直线 QN 的斜率不存在时, 易求得直线 QN 的方程为 $x = -3$, 直线 PM 的方程为 $y = \frac{2}{3}x - 1$,

则 $x_0 = -3$, $y_0 = -3$, 所以 $\frac{y_0}{x_0} = 1$. 综上, $\frac{y_0}{x_0} = 1$. -----12分

21 【详解】

$$(1) f(x) \text{ 定义域为 } (0, +\infty), \quad f'(x) = \frac{(x-1)(e^x - x)}{x^2},$$

令 $h(x) = e^x - x$, 由 $h'(x) = e^x - 1 = 0$ 得 $x = 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 递减, 在 $(0, +\infty)$ 递增.

所以 $h(x) > h(0) > 0$. -----2分

由 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$, 所以 $f(x)$ 单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 1)$. -----4分

$$(2) \text{ 由题意得 } \frac{1}{ae} e^{x - \ln x} \geq x - \ln x, \quad \text{令 } t(x) = x - \ln x, \quad t'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0 \text{ 得 } x = 1.$$

$\therefore t(x)$ 在 $(0, 1)$ 递减, 在 $(1, +\infty)$ 递增. $\therefore t(x) > 0$. -----8分

$$\therefore \frac{1}{ae} e^t \geq t, \quad \text{即 } \frac{1}{ae} \geq \frac{t}{e^t}. \quad \text{-----9分}$$

令 $g(t) = \frac{t}{e^t}$, $g'(t) = \frac{1-t}{e^t} = 0$ 得 $t = 1$, 所以 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减. -----11分

$$\therefore g(t) \leq g(1) = \frac{1}{e}, \therefore \frac{1}{ae} \geq \frac{1}{e}, \therefore 0 < a \leq 1. \quad \text{-----12分}$$

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题做答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 并请考生务必将答题卡中所选试题的题号进行涂写.

22. 【详解】(1) 因为 $2\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=m-2\sqrt{3}$, 所以 $2\rho\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-2\rho\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=m-2\sqrt{3}$,

又因为 $\rho\sin\theta=y, \rho\cos\theta=x$, 所以化简为 $y=\sqrt{3}(x-2)+m$,

所以直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x=2+\frac{1}{2}t \\ y=m+\frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数}) \quad \text{-----3 分}$$

由 $\begin{cases} x=2+3\cos\varphi \\ y=3\sin\varphi \end{cases}$ 消去 φ 得: $(x-2)^2+y^2=9$, 所以曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=9$.

-----5 分

(2) 由 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}=\vec{0}$ 知 \overrightarrow{PA} 与 \overrightarrow{PB} 反向, 所以点 $P(2, m)$ 在圆内, -----6 分

联立直线 l 的参数方程和曲线 C 的普通方程, 可得 $t^2+\sqrt{3}mt+m^2-9=0$,

设 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 . 故 $t_1+t_2=-\sqrt{3}m$ ①, $t_1\cdot t_2=m^2-9$ ②

由 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1\cdot t_2 < 0 \end{cases}$ 解得 $-3 < m < 3$. -----8 分

又因为 $t_1\cdot t_2 < 0$, 由于 $t_1=-2t_2$, 代入 ①② 得 $7m^2=9$, 解得 $m=\pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$ (符合 m 的取值范

围). -----10 分

23. 【详解】(1) 当 $a=2$ 时, $f(x)>8 \Leftrightarrow |x-6|+|x-2|>8$

当 $x\geq 6$ 时, 有 $2x-8>8$, 解得 $x>8$, 此时得 $x>8$;

当 $2 < x < 6$ 时, 有 $6-x+x-2>8$, 此时无解;

当 $x\leq 2$ 时, 有 $6-x+2-x>8$, 解得 $x<0$, 此时得 $x<0$. -----4 分

综上, 不等式 $f(x)>8$ 的解集为 $(-\infty, 0)\cup(8, +\infty)$. -----5 分

(2) 对任意 $x\in R$, 恒有 $f(x)\geq 5-a$, 则 $f(x)_{\min}\geq 5-a$

因为 $f(x)=|x-a^2-2|+|x-a|\geq |a^2-a+2|$, 所以 $|a^2-a+2|\geq 5-a$ -----7 分

即 $a^2-a+2\geq 5-a$, 解得 $a\geq\sqrt{3}$ 或 $a\leq-\sqrt{3}$ -----9 分

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}, +\infty)$ -----10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

