四川省宜宾市四中高 2023 届高三上期末考试
理科数学参考答案：

1. B 2. D 3. C 4. B 5. D 6. C 7. C 8. A 9. B 10. B 11. B 12. A

13. $\frac{13}{2}$ 14. $-\frac{1}{3}$ 15. 1 16. ①③

17. 解：（1）$\because$ 月工资收入在$[45,50)$(百元)内的人数为15

$\therefore$ 月工资收入在$[45,50)$(百元)内的频率为: $\frac{15}{100}=0.15$；

由频率分布直方图得: $(0.02+0.04+2n+0.01)\times 5+0.15=1$ $\therefore n=0.05$

（2）①根据题意得到列联表:

	技术工	非技术工	总计
月工资不高于平均数	19	31	50
月工资高于平均数	31	19	50
总计	50	50	100

$K^2=\frac{100\times(19\times19-31\times31)}{50\times50\times50\times50}=5.76<10.828$

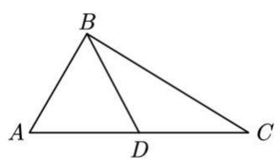
$\therefore$ 不能在犯错误的概率不超过0.001的前提下，认为是不是技术工与月工资是否高于平均数有关.

18 解：（1）$\because \vec{m}=(\sin A-\sin B,\sin B-\sin C)$，$\vec{n}=(a+b,c)$，$\vec{m}\perp\vec{n}$，

$\therefore (\sin A-\sin B)(a+b)+(\sin B-\sin C)c=0$.

$\therefore (a-b)(a+b)+(b-c)c=0$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$.

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$. $\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.



（2）在$\triangle ABD$中，由$BD=\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$和余弦定理，得

$BD^2=3=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=AB^2+AD^2-AB\cdot AD$.

$\because D$是AC的中点，$\therefore AD=\frac{b}{2}$

$\therefore c^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\times\frac{b}{2}=3$，化简得$4c^2+b^2-2bc=12$，即$(b+2c)^2-6bc=12$. $\because b+2c=4\sqrt{3}$，

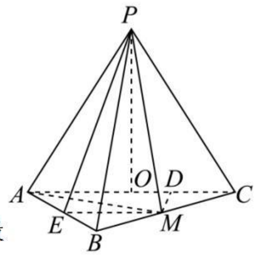
$\therefore (4\sqrt{3})^2-6bc=12$，解得$bc=6$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}bc}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. $\therefore \triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

19. 解：(1) 因为$AB=BC=\sqrt{2}$, $AC=2$，所以有$AB^2+BC^2=AC^2$，所以三角形ABC是直角三角形，而O为

斜边 AC 的中点.所以三角形 ABC 的外心为点 O，因为 $PA=PB=PC$，所以点 P 在底面 ABC 的射影是底面 ABC 的外心，因此 $PO\perp$ 平面 ABC，而 $BC\subset$ 平面 ABC，因此有 $PO\perp BC$；

（2）由（1）可知：$PO\perp$ 平面 ABC，而 $PO\subset$ 平面 PAC，所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，过 M 作 $MD\perp AC$，垂足为 D，因为平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，所以 $MD\perp$ 平面 PAC，因为直线 AM 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin\angle DAM=\frac{\sqrt{10}}{10}$，设 $BM=x$，



所以 $AM=\sqrt{2+x^2}$，因此由 $\sin\angle DAM=\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{DM}{AM}\Rightarrow DM=\frac{\sqrt{10(2+x^2)}}{10}$，因此有

$CM=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{10(2+x^2)}}{10}$，根据 $BC=AM+CM=2$，可得

$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{10(2+x^2)}}{10}+x=\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=2\sqrt{2}$（舍去），故 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此点 M 是线段中点 E，连接 EM,PE，则有 $EM//AC,EM=\frac{1}{2}AC=1$，所以 $\angle PME$ 是直线 AC 与 PM 所成角（或补角），

因为 $PA=PB=PC=2$，$AB=BC=\sqrt{2}$，所以 $PM=PE=\sqrt{PB^2-(\frac{1}{2}AB)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，由余弦定理可知：

$\cos\angle PME=\frac{PM^2+EM^2-PE^2}{2\cdot PM\cdot ME}=\frac{\sqrt{14}}{7}$.

20.解:(1)设椭圆的焦距为 $2c$，由题意可得，$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\2a=4\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\b=1\\c=\sqrt{3}\end{cases}$，∴椭圆 C 的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）由（1）可知 $F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $\overrightarrow{PA}=\left(x_1-3,y_1\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(x_2-3,y_2\right)$，

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(x_1-3\right)\left(x_2-3\right)+y_1y_2=x_1x_2+y_1y_2-3\left(x_1+x_2\right)+9$，

①当直线 l 与 x 轴垂直时，直线 l 的方程为 $x=\sqrt{3}$，得 $x_1=x_2=\sqrt{3}$，

代入得 $y_1=\frac{1}{2}$，$y_2=-\frac{1}{2}$，或 $y_1=-\frac{1}{2}$，$y_2=\frac{1}{2}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{47}{4}-6\sqrt{3}$，

②当直线 l 不与 x 轴垂直时，设直线的方程为 $y=k\left(x-\sqrt{3}\right)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\y=k\left(x-\sqrt{3}\right)\end{cases}$，得 $\left(1+4k^2\right)x^2-8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$，由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{12k^2-4}{1+4k^2}$，

$\therefore y_1y_2=k^2\left[x_1x_2-\sqrt{3}\left(x_1+x_2\right)+3\right]=-\frac{k^2}{1+4k^2}$，

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{12k^2-4}{1+4k^2}-3\times\frac{8\sqrt{3}k^2}{1+4k^2}-\frac{k^2}{1+4k^2}+9=\frac{\left(47-24\sqrt{3}\right)k^2+5}{1+4k^2}$ 令 $1+4k^2$，$t\geq1$，则 $k^2=\frac{t-1}{4}$，

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{\left(47-24\sqrt{3}\right)\cdot\dfrac{t-1}{4}+5}{t}=\left(\dfrac{47}{4}-6\sqrt{3}\right)+\dfrac{24\sqrt{3}-27}{4t}$，

又因函数 $f(t)=\dfrac{24\sqrt{3}-27}{4t}$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数，

$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le\dfrac{47}{4}-6\sqrt{3}+\dfrac{24\sqrt{33}-27}{4}=5$，综上：$m$ 的最小值为 5.

21．解：$\because f(-x)=f(x)\therefore f(x)$ 为偶函数，只需先研究 $x\in[0,\pi]$，

$f(x)=x\sin x+\cos x$，$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$，

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$f'(x)\ge0$，当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，$f'(x)\le0$，

所以 $f(x)$ 在 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 单调递增，在 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，单调递减，

所以根据偶函数图象关于 y 轴对称，

得 $f(x)$ 在 $x\in\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right]$ 单调递增，在 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 单调递减，

故 $f(x)$ 单调递减区间为：$\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$，$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$；单调递增区间为：$\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

（2）$f'(x)=x\cos x+ax=x(\cos x+a)$，

①$a\ge1$ 时，$f'(x)=x(\cos x+a)\ge0$ 在 $x\in[0,\pi]$ 恒成立，

$\therefore f(x)$ 在 $x\in[0,\pi]$ 单调递增

又 $f(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x\in[-\pi,\pi]$ 上无零点

②$0<a<1$ 时，$\exists x_0\in(0,\pi)$，使得 $x_0(\cos x_0+a)=0$，即 $\cos x_0=-a$.

又 $\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 单调递减，所以 $x\in(0,x_0)$，$f'(x)>0$，$x\in(x_0,\pi)$，$f'(x)<0$

所以 $x\in(0,x_0)$，$f(x)$ 单调递增，$x\in(x_0,\pi)$，$f(x)$ 单调递减，

又 $f(0)=1$，$f(\pi)=\dfrac{1}{2}a\pi^2-1$

（i）$\dfrac{1}{2}a\pi^2-1>0$，即 $\dfrac{2}{\pi^2}<a<1$ 时 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上无零点，

又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上无零点，

（ii）$\dfrac{1}{2}a\pi^2-1\le0$，即 $0<a\le\dfrac{2}{\pi^2}$.

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有 1 个零点，

又 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 2 个零点，

综上所述，当 $0<a\le\dfrac{2}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 2 个零点，

当 $a>\frac{2}{\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上无零点.

22.（1）将方程 $\begin{cases}x=4cos\alpha+2,\\ y=4sin\alpha,\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），消去参数 α 后可得 $x^2+y^2-4x-12=0$，

∴曲线 C 的普通方程为 $x^2+y^2-4x-12=0$， 将 $x^2+y^2=\rho^2$， $x=\rho\cos\theta$ 代入上式可得 $\rho^2-4\rho\cos\theta=12$，

∴曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-12=0$.

（2）设 A，B 两点的极坐标分别为 $\left(\rho_1,\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(\rho_2,\frac{\pi}{6}\right)$，由 $\begin{cases}\rho^2-4\rho cos\theta=12,\\ \theta=\frac{\pi}{6},\end{cases}$ 消去 θ 整理得 $\rho^2-2\sqrt{3}\rho-12=0$，

根据题意可得 ρ_1，ρ_2 是方程 $\rho^2-2\sqrt{3}\rho-12=0$ 的两根，∴ $\rho_1+\rho_2=2\sqrt{3}$，$\rho_1\rho_2=-12$，

∴ $|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=2\sqrt{15}$.

∵直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x-3y=0$，∴圆 C 的圆心 $(2,0)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=1$，

又圆 C 的半径为 $r=4$， ∴ $(S_{\triangle PAB})_{\max}=\frac{1}{2}|AB|(d+r)=\frac{1}{2}\times2\sqrt{15}\times(1+4)=5\sqrt{15}$.

23.（1）∵ $f(x)=\begin{cases}-4x-3,x\le-2\\ 5,-2<x\le-1\\ 2x+7,-1<x\le2\\ 4x+3,x>2\end{cases}$，∴ $f(x)$ 的最小值为5,∴ $f(x)\ge5$.

（2）由（1）知:$15-2f(x)$ 的最大值等于5,

∵ $a^2+\frac{9}{a^2+1}=\left(a^2+1\right)+\frac{9}{a^2+1}-1\ge2\sqrt{\left(a^2+1\right)\times\frac{9}{a^2+1}}-1=5$,

当 $\left(a^2+1\right)=\frac{9}{a^2+1}$,“=” 成立,

即 $a=\pm\sqrt{2}$,∴当 $a=\pm\sqrt{2}$ 时,$a^2+\frac{9}{a^2+1}$ 取得最小值5,当 $a\ne\pm\sqrt{2}$ 时,$a^2+\frac{9}{a^2+1}>5$,

又因为对任意实数 x,$15-2f(x)<a^2+\frac{9}{a^2+1}$ 都成立, 所以 $a\ne\pm\sqrt{2}$,∴a 的取值范围 $a\ne\pm\sqrt{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。