湘豫名校联考
2022年8月高三秋季入学摸底考试
数　　学(文科)

考生注意:

1. 本试卷共6页。时间120分钟,满分150分。答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置,并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上,然后认真核对条形码上的信息,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。作答非选择题时,将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1. 已知全集$U=\mathbf{R}$,集合$M=\{x||x-1|>1\}$,$N=\{x|-2\leqslant x<1\}$,则$\complement_U(M\cup N)=$　(　　)

A. $\{x|x<-2$ 或 $x>0\}$　　B. $\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 0\}$

C. $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|1<x\leqslant 2\}$

2. 某教育研究机构为了解高中教职工的身体健康状况,随机选取某高级中学进行调研.现采用分层抽样的方法从该校342名一线教师、126名教辅人员和72名行政管理人员中共抽取30人进行调研,则教辅人员被抽到的人数是　(　　)

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

3. 已知复数z满足$(1+i)z=1-2i$(i为虚数单位),则复数z的共轭复数$\bar{z}=$　(　　)

A. $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$　　B. $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$　　C. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$　　D. $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

4. 在研究线性回归模型时,样本数据$(x_i,y_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$所对应的点均在直线$y=-\frac{1}{2}x+3$上,用$R^2$表示解释变量对于预报变量变化的贡献率,则$R^2=$　(　　)

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

5. 已知角α满足$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}$,则$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$　(　　)

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{4}$

6. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线 l 交抛物线于 A，B 两点，若 AB 的中点 M 的横坐标为 2，则线段 AB 的长为 ( )

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

7. 已知数列$\{a_n\}$是递增的等差数列，a_3 是 a_1 与 a_{11} 的等比中项，且 $a_2=5$. 若 $b_n=\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}$，则数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=$ ( )

A. $\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3n+5}-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3n+2}-\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{3n+5}-\sqrt{5}$

8. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}+a$，若 $f(\ln m)=1$，$f\left(\ln\frac{1}{m}\right)=3$，则 $a=$ ( )

A. 1　　B. 2　　C. -1　　D. -2

9. 对于问题"求证方程 $3^x+4^x=5^x$ 只有一个解"可采用如下方法进行证明"将方程 $3^x+4^x=5^x$ 化为 $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$，设 $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$，因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $f(2)=0$，所以原方程只有一个解 $x=2$". 类比上述解题思路，则不等式 $x^6-(2x+3)>(2x+3)^3-x^2$ 的解集是 ( )

A. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-1,3)$

C. $(-3,1)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

10. 已知变量 x，y 的关系可以用模型 $y=c_1e^{c_2x}$（其中 e 为自然对数的底数）进行拟合，设 $z=\ln y$，其变换后得到一组数据如下：

x	4	6	7	8	10
z	2	3	4	5	6

由上表可得线性回归方程 $\hat{z}=0.7x+\hat{a}$，则当 $x=12$ 时，预测 y 的值为 ( )

A. 9.3　　B. $e^{9.3}$　　C. 7.5　　D. $e^{7.5}$

11. 已知三棱锥 $D-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上，底面△ABC 为等边三角形，且其所在圆 O_1 的面积为 6π. 若三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为 $9\sqrt{3}$，则球 O 的半径 R 为 ( )

A. $4\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{3}$

C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

12. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$，$x>0$. 若存在实数 $a\in[0,1]$，使得 $f\left(2-\frac{1}{m}\right)\leqslant a^3-\frac{1}{2}a^2-2a+e^{-1}$ 成立，则正实数 m 的取值范围为 ( )

A. $\left(\frac{1}{2},1\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right]$

C. $(0,1)$　　D. $(0,1]$

第Ⅱ卷(非选择题　共90分)

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,-2)$, $\boldsymbol{b}=(\lambda,3)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则实数 $\lambda=$________.

14. 若实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-2y-2\leqslant 0,\\2x-y-2\geqslant 0,\\2x+3y-6\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最小值为________.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$,且满足 $a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$. 若对于任意的正整数 n,存在 M,使得 $a_n<M$ 恒成立,则 M 的最小值是________.

16. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_1 的直线 l 与双曲线的左、右两支分别交于 M,N 两点,且 $\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$, $(\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N})\cdot\overrightarrow{MN}=0$,则双曲线 C 的离心率为________.

三、解答题:共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17. (本小题满分12分)

已知 a,b,c 分别为△ABC 的内角 A,B,C 所对的边,且 $(a+c-b)(\sin A-\sin C+\sin B)=c\sin B$.

(1)求角 A 的大小;

(2)若 $a=2\sqrt{3}$,求△ABC 面积的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

中国共产党第二十次全国代表大会（简称中共二十大）将于 2022 年下半年在北京召开. 党的二十大相关工作网络征求意见在 4 月 15 日至 5 月 16 日进行，在此期间，广大人民群众可通过人民日报社、新华社、中央广播电视总台所属官网、新闻客户端以及"学习强国"学习平台开设的专栏提出意见建议. 某高校团委为了解本校大学生对此事的关注和参与程度，特地在校园进行了一次抽样调查，得到以下的 2×2 列联表（单位：人）.

	了解	不了解	合计
男生	40	10	50
女生	30	20	50
合计	70	30	100

（1）根据列联表，能否在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下，认为是否了解此事与性别有关？

（2）现从对此事不了解的学生中，按性别采用分层抽样的方法选出 6 人，再从这 6 人中随机抽取 2 人做进一步的调研，求抽取的 2 人中至多有 1 人是男生的概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

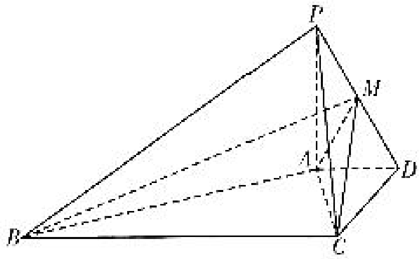
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$平面 $ABCD$，$AD/\!/BC$，$AD\perp CD$，且 $AD=1$，$BC=5$，$PA=CD=2$.

(1)证明：$AC\perp PB$；

(2)若点 M 为 PD 的中点，求点 B 到平面 MAC 的距离.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为$\frac{1}{3}$，以原点为圆心、椭圆短半轴长为半径的圆与直线 $x-y-4=0$ 相切.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)过点 F_2 作直线 l 交椭圆 C 于 M，N 两点（直线 l 与 x 轴不重合）. 在 x 轴上是否存在点 P，使得直线 PM 与 PN 的斜率之积为定值？若存在，求出所有满足条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{a}{x^2}+2\ln x(a>0)$，$g(x)=x^3-x^2$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)若对于任意的 $x_1\in(0,2]$，都存在 $x_2\in[1,2]$，使得 $x_1f(x_1)\geqslant g(x_2)$成立，试求实数 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha, \\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$ 为参数），直线 l 过点 $A(-1,0)$，倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$．以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系．

（1）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的极坐标方程；

（2）设直线 l 与 y 轴交于点 B，点 P 为曲线 C 上的动点，当 $\angle PAB$ 最大时，求 $\triangle PAB$ 的面积．

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+1|-|x-5|$．

（1）求不等式 $f(x)>3$ 的解集；

（2）若 $f(x)_{\max}=m$，且正数 a,b 满足 $a+b=m$，证明：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant\frac{2}{9}$．

湘豫名校联考
2022年8月高三秋季入学摸底考试
数学(文科)参考答案

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	B	C	D	C	A	B	A	D	C	A

1.C 【解析】因为集合 $M=\{x||x-1|>1\}=\{x|x<0$ 或 $x>2\}$,又 $N=\{x|-2\leqslant x<1\}$,所以 $M\cup N=\{x|x<1$ 或 $x>2\}$.所以 $\complement_U(M\cup N)=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$.故选C.

2.B 【解析】从342名一线教师、126名教辅人员和72名行政管理人员中共抽取30人进行调研,则教辅人员被抽到的人数为 $30\times\dfrac{126}{342+126+72}=7$.故选B.

3.B 【解析】由已知可得 $z=\dfrac{1-2i}{1+i}=\dfrac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$,所以 $\bar{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i$.故选B.

4.C 【解析】因为样本数据所对应的点都在直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ 上,所以 $R^2=1$.故选C.

5.D 【解析】方法一:因为 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$,所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

等式两边同时平方,得 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$,即 $1-\sin 2\alpha=\dfrac{3}{4}$,解得 $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{4}$.所以 $\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin 2\alpha=\dfrac{1}{4}$.

方法二:$\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=1-2\times\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.故选D.

6.C 【解析】方法一:过点 A,B,M 分别向抛物线的准线作垂线,垂足分别为 A_1,B_1,M_1,因为点 M 的横坐标为2,所以 $|MM_1|=3$.所以 $|AB|=|AF|+|BF|=|AA_1|+|BB_1|=2|MM_1|=6$.

方法二:设点 A,B 的横坐标分别为 x_1,x_2,则 $x_1+x_2=2x_M=4$.由过抛物线的焦点的弦长公式,知 $|AB|=x_1+x_2+p=2x_M+2=6$.故选C.

7.A 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 是递增的等差数列,所以数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$.

由题意得 $\begin{cases}a_1+d=5,\\(a_1+2d)^2=a_1(a_1+10d),\end{cases}$ 解得 $a_1=2,d=3$ 或 $a_1=5,d=0$(舍去).

所以 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$.所以 $b_n=\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1}$.

所以 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(\sqrt{5}-\sqrt{2})+(\sqrt{8}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})=\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}$.

故选A.

8.B 【解析】由函数 $f(x)=e^x-e^{-x}+a$,可得 $f(-x)+f(x)=2a$.

因为 $f\left(\ln\dfrac{1}{m}\right)=f(-\ln m)=3$,又 $f(\ln m)=1$,所以 $f(\ln m)+f\left(\ln\dfrac{1}{m}\right)=1+3=4=2a$.所以 $a=2$.故选B.

9.A 【解析】由不等式 $x^6-(2x+3)>(2x+3)^3-x^2$,得 $(x^2)^3+x^2>(2x+3)^3+(2x+3)$.

设函数 $f(t)=t^3+t$,则 $f'(t)=3t^2+1>0$,所以 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

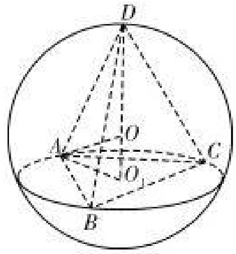
因为 $f(x^2)>f(2x+3)$，所以 $x^2>2x+3$. 解得 $x>3$ 或 $x<-1$. 故选 A.

10. D 【解析】由表格数据计算可知：$\bar{x}=\dfrac{4+6+7+8+10}{5}=7$，$\bar{z}=\dfrac{2+3+4+5+6}{5}=4$.

将 $\bar{x}$，$\bar{z}$ 代入 $\hat{z}=0.7x+\hat{a}$，解得 $\hat{a}=-0.9$. 所以 $\hat{z}=0.7x-0.9$.

所以 $\hat{y}=e^{z}=e^{0.7x-0.9}$. 所以当 $x=12$ 时，$\hat{y}=e^{0.7\times12-0.9}=e^{7.5}$. 故选 D.

11. C 【解析】如图，$\triangle ABC$ 所在圆 O_1 即为 $\triangle ABC$ 的外接圆.



设圆 O_1 的半径为 r，则 $\pi r^2=6\pi$，解得 $r=\sqrt{6}$.

因为 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $A=B=C=60^\circ$，$AB=BC=AC$.

由正弦定理可得 $\dfrac{AB}{\sin 60^\circ}=2r$，解得 $AB=3\sqrt{2}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\times(3\sqrt{2})^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

如图，当 O_1，O，D 三点共线时，三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大，最大值为 $9\sqrt{3}$，此时 $DO_1\perp$ 平面 ABC，三棱锥的高 h 最大，且有 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\times h=9\sqrt{3}$，解得 $h=6$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1A$ 中，$(6-R)^2+r^2=R^2$，解得 $R=\dfrac{7}{2}$. 故选 C.

12. A 【解析】因为 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$，所以 $f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$，$x>0$.

当 $x\in(0,2)$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减.

设 $\varphi(a)=a^3-\dfrac{1}{2}a^2-2a+e^{-1}$，$a\in[0,1]$，则 $\varphi'(a)=3a^2-a-2=(3a+2)(a-1)$，

所以当 $a\in[0,1]$ 时，$\varphi'(a)\leqslant0$，函数 $\varphi(a)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减. 所以 $\varphi(a)_{\max}=\varphi(0)=e^{-1}$.

因为 $f(1)=e^{-1}$，所以存在实数 $a\in[0,1]$，使得不等式 $f\left(2-\dfrac{1}{m}\right)\leqslant a^3-\dfrac{1}{2}a^2-2a+e^{-1}$ 成立，等价于 $f\left(2-\dfrac{1}{m}\right)\leqslant e^{-1}=f(1)$. 因为 m 为正实数，所以 $2-\dfrac{1}{m}<2$.

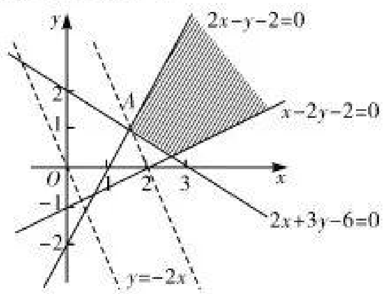
又因为函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}0<2-\dfrac{1}{m}\leqslant1,\\ m>0,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{1}{2}<m\leqslant1$.

所以正实数 m 的取值范围为 $\left(\dfrac{1}{2},1\right]$. 故选 A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2 【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\lambda+(-2)\times3=0$，解得 $\lambda=2$.

14. 4 【解析】作出不等式组满足的平面区域，如图所示，



由$\begin{cases}2x-y-2=0,\\2x+3y-6=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\y=1,\end{cases}$即$A\left(\dfrac{3}{2},1\right)$.

由图知,当目标函数$z=2x+y$经过点$A\left(\dfrac{3}{2},1\right)$时,$z$取得最小值,即$z_{\min}=2\times\dfrac{3}{2}+1=4$.故$z=2x+y$的最小值为4.

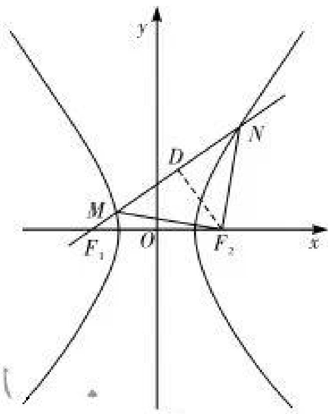
15.3 【解析】因为数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,且$a_{n+1}=a_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以当$n\geqslant2$时,$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=$

$$2+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2+\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3.$$

当$n=1$时,$a_1=2<3$满足上式,所以$a_n<3$恒成立.所以$M\geqslant3$.故M的最小值是3.

16.$\sqrt{3}$ 【解析】如图,设D为MN的中点,连接F_2D.



易知$\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N}=2\overrightarrow{F_2D}$.

所以$(\overrightarrow{F_2M}+\overrightarrow{F_2N})\cdot\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{F_2D}\cdot\overrightarrow{MN}=0$.所以$F_2D\perp MN$.

又因为D为MN的中点,

所以$|F_2M|=|F_2N|$.

因为$\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=0$,

所以$F_2M\perp F_2N$,

所以$\triangle MF_2N$为等腰直角三角形.

设$|MF_2|=|NF_2|=m$,由双曲线的定义知$\begin{cases}m-|MF_1|=2a,\\\sqrt{2}m+|MF_1|-m=2a,\end{cases}$

解得$m=2\sqrt{2}a$.

所以$|MF_1|=2(\sqrt{2}-1)a$.

所以$|F_1D|=|MF_1|+|MD|=2\sqrt{2}a$.

在$\mathrm{Rt}\triangle F_1F_2D$中,$4c^2=(2\sqrt{2}a)^2+(2a)^2$,化简得$\dfrac{c^2}{a^2}=3$.

所以$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{3}$.故双曲线C的离心率为$\sqrt{3}$.

三、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答.第22、23题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共60分.

17.【解析】(1)在$\triangle ABC$中,由题意及正弦定理得$(a+c-b)(a-c+b)=bc$,

整理得$b^2+c^2-a^2=bc$.

由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$. ………………………… 4分

因为$0<A<\pi$,所以$A=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………… 6分

(2)方法一:由(1)知,$A=\dfrac{\pi}{3}$,又$a=2\sqrt{3}$,

所以$12=b^2+c^2-bc\geqslant2bc-bc=bc$.

所以 $bc\leqslant12$，当且仅当 $b=c=2\sqrt{3}$ 时，等号成立. ………………………………………… 10 分

所以 $(S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$. ………………………………………… 12 分

方法二：由(1)知，$A=\frac{\pi}{3}$，又 $a=2\sqrt{3}$，

所以由正弦定理，知 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4$，

所以 $b=4\sin B$，$c=4\sin C$. ………………………………………… 8 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=8\sin B\sin C\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\sin B\sin C$.

又因为 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $4\sqrt{3}\sin B\sin C=4\sqrt{3}\sin B\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)=4\sqrt{3}\sin B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B+\frac{1-\cos 2B}{2}\right)=$

$2\sqrt{3}\sin\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\leqslant2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$. ………………………………………… 10 分

因为 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，所以 $0<B<\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，

所以当 $2B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值，最大值为 $3\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

18.【解析】(1) $K^2=\frac{100\times(20\times40-30\times10)^2}{70\times30\times50\times50}=\frac{100}{21}\approx4.762<5.024$，……………………………… 4 分

所以不能在犯错误的概率不超过 0.025 的前提下认为是否了解此事与性别有关. ………………………… 6 分

(2)由题意知，按分层抽样方法抽取出来的 6 人中，有女生 $\frac{20}{30}\times6=4$(人)，记为 A_1，A_2，A_3，A_4；

有男生 $\frac{10}{30}\times6=2$(人)，记为 B_1，B_2. ………………………………………… 8 分

则从这 6 人中抽取 2 人的取法为：

A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_2A_3，A_2A_4，A_3A_4，A_1B_1，A_1B_2，A_2B_1，A_2B_2，A_3B_1，A_3B_2，A_4B_1，A_4B_2，B_1B_2，

一共有 15 种不同的抽取方法，其中抽取的 2 人中至多 1 人是男生的抽取方法有 14 种.

所以抽取的 2 人中至多有 1 人是男生的概率为 $P=\frac{14}{15}$. ………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)证明：因为 $AD\perp CD$，$AD=1$，$CD=2$，所以 $AC=\sqrt{5}$.

又因为 $BC=5$，且 $AD/\!/BC$，所以 $AB=\sqrt{(5-1)^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

因为 $AB=2\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{5}$，$BC=5$，所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $AC\perp AB$. ………………………… 2 分

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AC$.

因为 $PA\cap AB=A$，$PA\subset$ 平面 PAB，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $AC\perp$ 平面 PAB.

因为 $PB\subset$ 平面 PAB，所以 $AC\perp PB$. ………………………………………… 4 分

(2)因为点 M 为 PD 的中点，所以三棱锥 $M-ACB$ 的高 $h=\frac{1}{2}PA=1$.

所以 $V_{M-ACB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACB}\cdot h=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}\right)\times1=\frac{5}{3}$. ………………………………………… 6 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAD$ 中，$PD=\sqrt{5}$，因为 M 为 PD 的中点，所以 $AM=\frac{1}{2}PD=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$.

又因为 $CD\perp AD$，$PA\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，$PA\cap AD=A$，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD. 因为 $PD\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp PD$.

在 Rt$\triangle MCD$ 中，$CD=2$，$MD=\frac{1}{2}PD=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $MC=\sqrt{CD^2+MD^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$. ………………………… 8 分

在 $\triangle AMC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle MAC=\frac{AM^2+AC^2-MC^2}{2AM\cdot AC}=\frac{1}{5}$，

所以 $\sin\angle MAC=\frac{2\sqrt{6}}{5}$. 所以 $S_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}AM\cdot AC\cdot\sin\angle MAC=\frac{\sqrt{6}}{2}$. ………………………… 10 分

设点 B 到平面 MAC 的距离为 d，

则 $V_{B-ACM}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACM}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}d=V_{M-ACB}=\frac{5}{3}$，解得 $d=\frac{5\sqrt{6}}{3}$.

所以点 B 到平面 MAC 的距离为 $\frac{5\sqrt{6}}{3}$. ………………………… 12 分

20.【解析】(1) 由题意知，直线 $x-y-4=0$ 与圆 $x^2+y^2=b^2$ 相切，

所以圆心 $(0,0)$ 到直线 $x-y-4=0$ 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}=b$，即 $b=2\sqrt{2}$.

因为 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$，$a^2=c^2+b^2$，$b=2\sqrt{2}$，所以 $a=3$，$c=1$.

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. ………………………… 4 分

(2) 因为直线 l 过点 $F_2(1,0)$ 且与 x 轴不重合，所以可设直线 l 的方程为 $x=my+1$.

联立方程，得 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1,\end{cases}$ 化简并整理得 $(8m^2+9)y^2+16my-64=0$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{16m}{8m^2+9}$，$y_1y_2=-\frac{64}{8m^2+9}$.

所以 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\frac{18}{8m^2+9}$，$x_1x_2=(my_1+1)(my_2+1)=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=$

$\frac{-72m^2+9}{8m^2+9}$. ………………………… 6 分

设存在点 $P(t,0)$，则直线 PM 与 PN 的斜率分别为 $k_{PM}=\frac{y_1}{x_1-t}$，$k_{PN}=\frac{y_2}{x_2-t}$，

所以 $k_{PM}\cdot k_{PN}=\frac{y_1y_2}{(x_1-t)(x_2-t)}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2-t(x_1+x_2)+t^2}=\frac{-\frac{64}{8m^2+9}}{\frac{-72m^2+9}{8m^2+9}-t\cdot\frac{18}{8m^2+9}+t^2}=$

$\frac{-64}{(8t^2-72)m^2+9-18t+9t^2}$.

令 $8t^2-72=0$，解得 $t=-3$ 或 $t=3$. ………………………… 10 分

当 $t=-3$ 时，$\forall m\in\mathbf{R}$，$k_{PM}\cdot k_{PN}=-\frac{4}{9}$；

当 $t=3$ 时，$\forall m\in\mathbf{R}$，$k_{PM}\cdot k_{PN}=-\frac{16}{9}$.

因此，满足条件的点 P 的坐标为 $(-3,0)$ 和 $(3,0)$. …………………………………… 12 分

21.【解析】(1) 由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

因为 $f(x)=\frac{a}{x^2}+2\ln x$，则 $f'(x)=-\frac{2a}{x^3}+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2a}{x^3}$.

当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$.

所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1,+\infty)$，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$. …………………… 4 分

(2) 因为 $g(x)=x^3-x^2$，所以 $g'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$，

又 $x\in[1,2]$，所以 $g'(x)>0$，故函数 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=0$.

所以对任意的 $x\in(0,2]$，$xf(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $\frac{a}{x}+2x\ln x\geqslant 0$ 恒成立.

所以 $a\geqslant -2x^2\ln x$ 恒成立. …………………………………… 6 分

令 $h(x)=-2x^2\ln x$，$x\in(0,2]$，则 $h'(x)=-2x-4x\ln x=-2x(1+2\ln x)$，$x\in(0,2]$.

令 $h'(x)=0$，则 $1+2\ln x=0$，解得 $x=e^{-\frac{1}{2}}$. …………………………………… 8 分

当 $x\in(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 时，$h'(x)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 上单调递增；

当 $x\in(e^{-\frac{1}{2}},2]$ 时，$h'(x)<0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(e^{-\frac{1}{2}},2]$ 上单调递减.

所以 $h(x)_{\max}=h(e^{-\frac{1}{2}})=\frac{1}{e}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{e}$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. …………………………………… 12 分

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.【解析】(1) 因为曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha,\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\end{cases}$ (α 为参数)，

所以消去 α 可得曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$. …………………………………… 2 分

因为直线 l 的斜率为 $k=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$，且过点 $A(-1,0)$，所以直线 l 的方程为 $y=-(x+1)$，即 $x+y+1=0$.

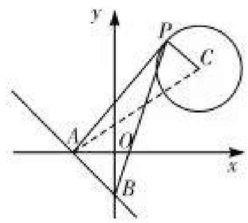
将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入上式，可得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+1=0$，即 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因此，曲线 C 的普通方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. … 5 分

(2) 点 $C(2,2)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|2+2+1|}{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以直线 l 与曲线 C 相离. 如图，

当 PA 与曲线 C 相切时，$\angle PAB$ 最大，此时设直线 PA 的方程为 $y=k'(x+1)$，即 $k'x-y+k'=0$，

所以 $\frac{|2k'-2+k'|}{\sqrt{k'^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $k'=1$ 或 $k'=\frac{7}{17}$.



当 $k'=\frac{7}{17}$ 时，$\angle PAB$ 最小，不满足条件，因此 $k'=1$. ………………………… 8 分

又因为直线 l 的斜率为 -1，所以 $PA\perp AB$. 来源微信公众号：高三答案

连接 AC，则 $|AC|=\sqrt{13}$，$|PC|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|AC|^2=|PC|^2+|AP|^2$，所以 $|AP|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $B(0,-1)$，所以 $|AB|=\sqrt{2}$，所以 $\triangle PAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}|AB|\cdot|AP|=\frac{5}{2}$.

………………………………………………………………………………………… 10 分

23.【解析】(1) 由题意知 $f(x)=|x+1|-|x-5|=\begin{cases}-6, x\leqslant -1,\\ 2x-4, -1<x<5,\\ 6, x\geqslant 5.\end{cases}$ ………………………… 2 分

当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=-6$，不等式 $f(x)>3$ 不成立；

当 $-1<x<5$ 时，令 $2x-4>3$，解得 $x>\frac{7}{2}$，所以 $\frac{7}{2}<x<5$；

当 $x\geqslant 5$ 时，$f(x)=6$，不等式 $f(x)>3$ 恒成立.

综上所述，不等式 $f(x)>3$ 的解集为 $\left\{x\middle|x>\frac{7}{2}\right\}$. ………………………… 5 分

(2) 方法一：

证明：由(1)知 $f(x)_{\max}=6$，所以 $a+b=6$.

因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{6}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\right)\geqslant\frac{1}{6}\left(2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\right)=\frac{2}{3}$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号.

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号.

故有 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant\frac{2}{9}$. ………………………… 10 分

方法二：

证明：由(1)知 $f(x)_{\max}=6$，所以 $a+b=6$.

因为 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)(a+b)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}\right)\geqslant\frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{ab}}+\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{ab}}$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号.

又因为 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant\frac{2}{3}\times\frac{2}{a+b}=\frac{2}{9}$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号.

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geqslant\frac{2}{9}$. ………………………… 10 分

方法三：

证明：由(1)知 $f(x)_{\max}=6$，所以 $a+b=6$.

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{(a+b)^2}{36}=\frac{1}{36}\times\left(2\times\frac{b}{a}+2\times\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+2\right)\geqslant\frac{1}{36}\times(4+2+2)=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$，

当且仅当 $a=b=3$ 时取等号. ………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。