



数学一

参考答案、提示及评分细则

1. B 由题意知, $A = \left\{ x \mid \frac{2x+1}{x-4} \leq 0 \right\} = \left\{ x \mid -\frac{1}{2} \leq x < 4 \right\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, 所以 $A \cap B$ 的子集的个数为 $2^3 = 8$. 故选 B.
2. B 因为幂函数 $f(x) = (2m^2 - 2m - 11)x^{m+1}$, 所以 $2m^2 - 2m - 11 = 1$, 解得 $m = -2$ 或 $m = 3$. 当 $m = -2$ 时, $f(x) = x^{-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不符合题意; 当 $m = 3$ 时, $f(x) = x^4$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 符合题意. 综上, $m = 3$. 故选 B.
3. D 不等式 $x^2 + 2x + 4 > 0$ 与 $2x^2 + 3x + 5 > 0$ 的解集均为 \mathbf{R} , 但 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, 所以充分性不成立; 不妨令 $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 1, a_2 = -1, b_2 = -2, c_2 = -1$, 满足 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, 但 $x^2 + 2x + 1 > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, $-x^2 - 2x - 1 > 0$ 的解集为 \emptyset , 所以 $a_1x^2 + b_1x + c_1 > 0$ 与 $a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0$ 的解集不同, 必要性不成立. 故选 D.
4. B 当 $0 < x \leq \frac{1}{4}$ 时, $f(x) = 4 \ln x - 4x - 1 \Rightarrow 4 \ln x - 4x - 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{4})$ 上单调递增, 当 $x \geq \frac{1}{4}$ 时, $f(x) = 4 \ln x - 4x - 1 = 4 \ln x - 4x - 1$, 所以 $f'(x) = \frac{4}{x} - 4 = \frac{4(1-x)}{x}$, 当 $\frac{1}{4} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{4}, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f(x)_{\max} = f(1) = -1$. 故选 B.
5. A 因为 $a = (\frac{4}{5})^{\frac{1}{2}} = (\frac{16}{25})^{\frac{1}{4}} < 1, b = (\frac{5}{4})^{\frac{1}{3}} > 1, c = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{4}} = (\frac{27}{64})^{\frac{1}{4}} < 1$, 又 $0 < \frac{27}{64} < \frac{1}{2} < \frac{16}{25} < 1, y = x^{\frac{1}{4}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $c = (\frac{27}{64})^{\frac{1}{4}} < (\frac{16}{25})^{\frac{1}{4}} = a$. 综上, $c < a < b$. 故选 A.
6. C 由题意可得当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 2^{x^2+2x-2} - 1$, 所以 $f(x)$ 的值域为 $[1, +\infty)$, 当 $x < 1$ 时, $f(x)$ 的值域为 A , 又 $f(x)$ 的值域为 \mathbf{R} , 所以 $(-\infty, 1) \subseteq A$, 所以 $\begin{cases} 2-a > 0, \\ 2-a+3a \geq 1, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2} \leq a < 2$, 即 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, 2)$. 故选 C.
7. C 因为函数 $f(x)$ 满足对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 又 $f(3) = 0$, 所以 $f(-3) = f(3) = 0$, 所以当 $-3 < x < 3$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x < -3$ 或 $x > 3$ 时, $f(x) < 0$, 则不等式 $(2x-1)f(x) > 0$ 等价于 $\begin{cases} f(x) > 0, \\ 2x-1 > 0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) < 0, \\ 2x-1 < 0, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2} < x < 3$ 或 $x < -3$, 即原不等式的解集为 $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, 3)$. 故选 C.

1

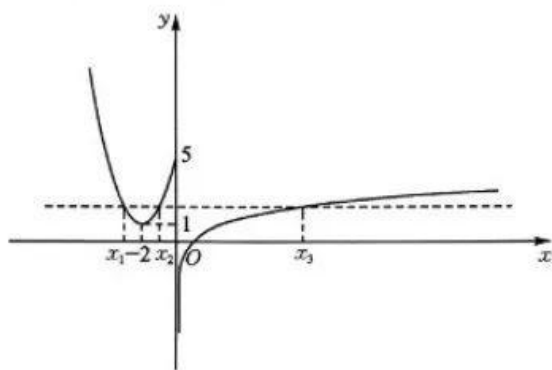
【一联试卷·数学参考答案 第1页(共6页)】

1

官方微信公众号: zizzsw
官方网站: www.zizzs.com

咨询热线: 010-5601 9830
微信客服: zizzs2018

8. D 作出 $f(x)$ 的函数图象如图所示: 答案解析网



若存在实数 x_1, x_2, x_3 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 所以 $x_1 + x_2 = -4, x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) f(x_3) = (x_3 - 4) f(x_3) = (x_3 - 4) \ln x_3$, 由图可知, $1 < f(x_3) \leq 5$, 所以 $e < x_3 \leq e^5$. 设 $g(x) = (x-4) \ln x, x \in (e, e^5]$, 所以 $g'(x) = \ln x + 1 - \frac{4}{x}$, $g'(x)$ 在 $(e, e^5]$ 上单调递增, 又 $g'(e) = 2 - \frac{4}{e} > 0$, 所以当 $x \in (e, e^5]$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(e, e^5]$ 上单调递增, 所以 $g(x)_{\max} = g(e^5) = (e^5 - 4) \ln e^5 = 5e^5 - 20$. 故选 D. 答案解析网

9. ABD 若 $a > 1$, 因为 $\log_a b < 1 - \log_a a$, 所以 $b < a$. 当 $b < 1 < a$ 时, A 正确, 当 $1 < b < a$ 时, B 正确; 若 $a < 1$, 因为 $\log_a b > 1 - \log_a a$, 所以 $b > a$. 综上, $(a-1)(a-b) > 0$, 故 C 错误, D 正确. 故选 ABD. 答案解析网

10. ABC $ab - \frac{1}{2} > 2a \cdot b \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2a+b}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}$, 当且仅当 $2a = b$, 即 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 故 ab 有最大值 $\frac{1}{8}$, 故 A 正确; $(\sqrt{2a} - \sqrt{b})^2 = 2a + b + 2\sqrt{2ab} - 1 + 2\sqrt{2ab} \leq 1 + 2\sqrt{2 \times \frac{1}{8}} = 2$, 当且仅当 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 所以 $\sqrt{2a} + \sqrt{b}$ 有最大值 $\sqrt{2}$, 故 B 正确; $\frac{1}{a} + \frac{a}{b} - \frac{2a+b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2 = 4$, 当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, 即 $a = b = \frac{1}{3}$ 时等号成立, 即 $\frac{1}{a} + \frac{a}{b}$ 有最小值 4, 故 C 正确; $4a^2 + b^2 = (2a+b)^2 - 4ab = 1 - 4ab \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 所以 $4a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, 故 D 错误. 故选 ABC.

11. AD 若 $a = 4$, 则 $f(x) = x^3 - 12x + 2$, 所以 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$, 当 $x < -2$ 或 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-2 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在 $(-2, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 又 $f(2) = 2^3 - 12 \times 2 + 2 = -14$, 所以 $f(x)$ 的极小值为 -14 , 故 A 正确; 由 $f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在定义域内为增函数, 此时 $f(x)$ 没有极值点, 故 B 错误; 若 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上有极值点, 则 $f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a) = 0$ 在 $(1, 2)$ 上有解, 所以 $\begin{cases} 1 - a < 0, \\ 2^2 - a > 0, \end{cases}$ 解得 $1 < a < 4$, 即 a 的取值范围是 $(1, 4)$, 故 C 错误; 由 $f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在定义域内为增函数, 故不存在三个零点, 不符合题意; 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \pm\sqrt{a}$. 所以当 $x \in (-\infty, -\sqrt{a})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (\sqrt{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为

XGK

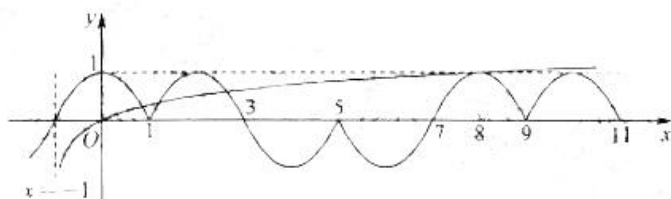
【一联试卷·数学参考答案 第2页(共6页)】

$(-\infty, -\sqrt{a})$ 和 $(\sqrt{a}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$, 所以函数的极小值 $f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + 2$ 和极大

值 $f(-\sqrt{a}) = 2a\sqrt{a} + 2$. 又函数 $f(x)$ 恰有3个零点, 所以
$$\begin{cases} a > 0, \\ f(-\sqrt{a}) > 0, \\ f(\sqrt{a}) < 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a > 0, \\ a\sqrt{a} + 1 > 0, \\ a\sqrt{a} - 1 > 0, \end{cases} \text{解得 } a > 1, \text{即 } a$$

的取值范围是 $(1, +\infty)$, 故 D 正确. 故选 AD. 答案解析网

12. AC 因为 $f(x-2) = -f(-x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于 $(-1, 0)$ 中心对称, 故 A 正确; 因为 $f(x)$ 的图象关于 $(-1, 0)$ 中心对称, 所以 $f(-1) = a + 1 = 0$, 解得 $a = -1$. 所以当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) = -x^2 + 1$, 因为 $f(x-2) = -f(-x)$, 所以 $f(x) = -f(-x-2)$, 因为 $f(1+x) = f(1-x)$, 所以 $f(x) = f(2-x)$, 所以 $f(2-x) = -f(-x-2)$, 即 $f(x) = -f(x-4)$. 当 $x \in [3, 5]$ 时, $-4+x \in [-1, 1]$, 所以 $f(x) = -f(-4+x) = -[-1 - (-4+x)^2 + 1] = x^2 - 8x + 15$, 故 B 错误; 因为 $f(x) = -f(x-4)$, 所以 $f(x+8) = -f(x+4) = -[-f(x)] = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期为 8, 又 $f(1) = -1 + 1 = 0, f(2) = f(0) = 1, f(3) = f(-1) = -1 + 1 = 0, f(4) = -f(0) = -1, f(5) = -f(1) = 0, f(6) = -f(2) = -1, f(7) = -f(3) = 0, f(8) = -f(4) = f(0) = 1$, 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(99) = 12[f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(8)] + f(1) - f(2) + f(3) = f(1) - f(2) + f(3) = -1$, 故 C 正确; 令 $g(x) = 0$, 即 $f(x) = \log_3(x+1)$, 画出 $y = f(x)$ 与 $y = \log_3(x+1)$ 的图象, 如图所示:



因为 $f(8) = \log_3(8+1) = 1, f'(8) = 0 < [\log_3(x+1)]'|_{x=8}$, 所以两函数图象共有 5 个交点, 所以 $g(x)$ 恰有 5 个不同的零点, 故 D 错误. 故选 AC. 答案解析网

13. 4 由题意知 $f(-2023) = f(-3) = f(1) = \log_3(1+2) + 3 = 4$.

14. 5 $\log_2 3 \times \log_3 4 + 3^{\log_3 4} + (-1.08)^0 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \times \frac{\ln 4}{\ln 3} + 3^{\log_3 4} + 1 = 2 + 2 + 1 = 5$.

15. $\frac{3}{4}$ 因为 $x+y = \frac{3}{2y} - \frac{1}{4x-1}$, 所以 $x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4x-1} = \frac{3}{2y} - y - \frac{1}{4} \geq 2\sqrt{(x-\frac{1}{4}) \cdot \frac{1}{4x-1}} = 1$, 当且仅当 $x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4x-1}$, 即 $x = \frac{3}{4}$ 时等号成立, 所以 $\frac{3}{2y} - y - \frac{1}{4} \geq 1$, 又 $y > 0$, 所以 $4y^2 + 5y - 6 \leq 0$, 解得 $0 < y \leq \frac{3}{4}$, 即 y 的最大值为 $\frac{3}{4}$. 答案解析网

16. $\frac{4}{e^2}$ 由 $\ln x = ye^x + \ln y$ 得 $\ln \frac{x}{y} = ye^x$, 所以 $\frac{x}{y} \ln \frac{x}{y} = xe^x$, 则 $xe^x = \ln \frac{x}{y} \cdot e^{\ln \frac{x}{y}}$, 因为 $x > 0, e^x > 0, e^{\ln \frac{x}{y}} > 0$, 所以 $\ln \frac{x}{y} > 0$, 令 $f(x) = xe^x (x > 0)$, 则 $f'(x) = e^x(x+1) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以由 $xe^x = \ln \frac{x}{y} \cdot e^{\ln \frac{x}{y}}$, 即 $f(x) = f(\ln \frac{x}{y})$, 得 $x = \ln \frac{x}{y}$, 所以 $y = \frac{x}{e^x}$, 所以 $xy = \frac{x^2}{e^x}$. 令 $g(x) = \frac{x^2}{e^x}, x > 0$, 所以 $g'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x} = \frac{x(2-x)}{e^x}$, 当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x > 2$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上

单调递增,在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,所以 $g(x)_{\max} = g(2) = \frac{4}{e^2}$.

17. 解:(1)由题意得: $\begin{cases} 2+x \geq 0, \\ 16-x^2 > 0, \end{cases}$ 2分

解得 $-2 \leq x < 4$, 所以 $A = [-2, 4)$ 3分

若 $m=3$, 则 $B = \{x | 1 \leq x \leq 5\} = [1, 5]$, 所以 $A \cup B = [-2, 5]$ 4分

(2)因为 $A \cap B = B$, 所以 $B \subseteq A$ 6分

当 $B = \emptyset$ 时, 满足 $B \subseteq A$, 则 $2m-1 < m-2$, 解得 $m < -1$; 7分

当 $B \neq \emptyset$ 时, 由 $B \subseteq A$ 得 $\begin{cases} m-2 \leq 2m-1, \text{ 答案解析网} \\ m-2 \geq -2, \text{ 解得 } 0 \leq m < \frac{5}{2}. \\ 2m-1 < 4, \end{cases}$ 9分

综上, m 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup [0, \frac{5}{2})$ 10分

18. 解:(1)因为 $f(x) = \log_2(2^x+1) + ax$ 是偶函数, 答案解析网

所以 $f(-x) - f(x) = 0$, 即 $\log_2(2^{-x}+1) - ax - \log_2(2^x+1) - ax = 0$,

即 $2ax = \log_2(2^{-x}+1) - \log_2(2^x+1) = \log_2 \frac{2^{-x}+1}{2^x+1} = -x$, 所以 $a = -\frac{1}{2}$ 5分

(2)因为对任意的 $x_1 \in [0, 4]$, 存在 $x_2 \in [0, 5]$, 使得 $g(x_1) = h(x_2)$,

所以 $g(x)$ 在 $[0, 4]$ 上的最小值不小于 $h(x)$ 在 $[0, 5]$ 上的最小值. 7分

因为 $g(x) = \log_2(2^x+1) + \frac{1}{2}x$ 在 $[0, 4]$ 上单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(0) = 1$ 9分

$h(x) = x^2 - 2x + m$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 答案解析网

所以 $h(x)_{\min} = h(1) = m - 1$ 10分

所以 $1 \geq m - 1$, 解得 $m \leq 2$, 即 m 的取值范围是 $(-\infty, 2]$ 12分

19. 解:(1)因为 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | -2 < x < 5\}$, 所以 $a < 0, -2+5 = -\frac{b}{a}, (-2) \times 5 = \frac{c}{a}$,

所以 $b = -3a, c = -10a (a < 0)$ 2分

所以 $bx^2 + ax + 2b - c < 0$ 等价于 $-3ax^2 + ax - 6a + 10a < 0$, 又 $a < 0$, 所以 $3x^2 - x - 4 < 0$ 4分

解得 $-1 < x < \frac{4}{3}$, 即关于 x 的不等式 $bx^2 + ax + 2b - c < 0$ 的解集为 $(-1, \frac{4}{3})$ 5分

(2)因为 $f(x) \geq 2ax + b$ 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 恒成立,

即 $ax^2 + (b-2a)x + c - b \geq 0$ 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 恒成立, 所以 $a > 0, \Delta = (b-2a)^2 - 4a(c-b) = b^2 + 4a^2 - 4ac \leq 0$, 所以 $0 \leq b^2 \leq 4a(c-a)$ 6分

所以 $\frac{b^2}{4a^2 + c^2} \leq \frac{4a(c-a)}{4a^2 + c^2} = \frac{4(\frac{c}{a} - 1)}{4 + (\frac{c}{a})^2}$ 7分

令 $t = \frac{c}{a} - 1$, 又 $4a(c-a) \geq b^2 \geq 0$, 所以 $c \geq a$, 即 $\frac{c}{a} \geq 1$, 所以 $t \geq 0$, 所以 $\frac{b^2}{4a^2 + c^2} \leq \frac{4t}{4 + (t+1)^2} = \frac{4t}{t^2 + 2t + 5}$,

令 $g(t) = \frac{4t}{t^2 + 2t + 5} (t \geq 0)$, 8分

当 $t=0$ 时, $g(0)=0$; 9分

当 $t>0$ 时, $g(t) = \frac{4}{t + \frac{5}{t} + 2} \leq \frac{4}{2\sqrt{5} + 2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 当且仅当 $t=\sqrt{5}$ 时, 等号成立. 11分

所以 $\frac{b^2}{4a^2+c^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 12分

20. 解: (1) 若 $a=3$, 则 $f(x) = 3^x + 3 \cdot 3^{-x}$,

所以 $f(x) \geq 4$, 即 $3^x + 3 \cdot 3^{-x} \geq 4$, 所以 $(3^x - 1)(3^x - 3) \geq 0$, 3分

所以 $0^x \leq 1$ 或 $3^x \geq 3$, 解得 $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$, 答案解析网

即不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集为 $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ 5分

(2) 若 $f(1) = \frac{10}{3}$, 即 $3 + \frac{a}{3} = \frac{10}{3}$, 解得 $a=1$, 6分

所以 $g(x) = 9^x + 9^{-x} + m(3^x + 3^{-x}) + 2m - 1 = (3^x + 3^{-x})^2 + m(3^x + 3^{-x}) + 2m - 3$,

令 $t = 3^x + 3^{-x}$, $t \in [2, +\infty)$, 所以 $y = g(x) = t^2 + mt + 2m - 3$ 7分

当 $-\frac{m}{2} \leq 2$, 即 $m \geq -4$ 时, $y = t^2 + mt + 2m - 3$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增, 答案解析网

所以 $y_{\min} = 2^2 + 2m + 2m - 3 = 4m + 1$, 即 $g(x)_{\min} = 4m + 1$ 9分

当 $-\frac{m}{2} > 2$, 即 $m < -4$ 时, $y = t^2 + mt + 2m - 3$ 在 $(2, -\frac{m}{2})$ 上单调递减, 在 $(-\frac{m}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $y_{\min} = (-\frac{m}{2})^2 + m \cdot (-\frac{m}{2}) + 2m - 3 = -\frac{m^2}{4} + 2m - 3$, 即 $g(x)_{\min} = -\frac{m^2}{4} + 2m - 3$ 11分

综上所述, $g(x)_{\min} = \begin{cases} -\frac{m^2}{4} + 2m - 3, m < -4, \\ 4m + 1, m \geq -4. \end{cases}$ 12分

21. 解: (1) 若 $a=2$, 则 $f(x) = (x-2)e^x - x^2 + 2x - 1$, 所以 $f'(x) = (x-1)e^x - 2x + 2$, 1分

所以 $f'(0) = -1 + 2 = 1$, 又 $f(0) = -2 - 1 = -3$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - (-3) = 1 \times (x - 0)$, 即 $x - y - 3 = 0$ 4分

(2) $f'(x) = (x-1)e^x - ax + a = (x-1)(e^x - a)$, 6分

当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 答案解析网 7分

当 $0 < a < e$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < \ln a$ 或 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $\ln a < x < 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递增, 在 $(\ln a, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增; 8分

当 $a=e$ 时, 由 $f'(x) \geq 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增; 9分

当 $a > e$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < 1$ 或 $x > \ln a$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < \ln a$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增. 答案解析网 10分

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;



当 $0 < a < e$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递增, 在 $(\ln a, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a = e$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a > e$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增. 12 分

22. (1) 解: 若 $f(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $a \leq -\frac{2\ln x}{x}$, 1 分

$$\text{令 } u(x) = -\frac{2\ln x}{x}, \text{ 所以 } u'(x) = -\frac{2-2\ln x}{x^2} = \frac{2(\ln x - 1)}{x^2},$$

所以当 $0 < x < e$ 时, $u'(x) < 0$, 当 $x > e$ 时, $u'(x) > 0$, 所以 $u(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $u(x)_{\min} = u(e) = -\frac{2}{e}$, 4 分

所以 $a \leq -\frac{2}{e}$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{2}{e}]$ 5 分

$$(2) \text{ 证明: 令 } g(x) = 0, \text{ 即 } x^2 - \frac{2\ln x}{x} - a = 0, \text{ 令 } h(x) = x^2 - \frac{2\ln x}{x} - a,$$

$$\text{则 } h'(x) = 2x - \frac{2(1-\ln x)}{x^2} = \frac{2(x^3 + \ln x - 1)}{x^2},$$

令 $r(x) = x^3 + \ln x - 1$, 所以 $r'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} > 0$, 所以 $r(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 答案解析网

又 $r(1) = 0$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $r(x) < 0$, 所以 $h'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $r(x) > 0$, 所以 $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 答案解析网 7 分

不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $0 < x_1 < 1 < x_2$, $0 < \frac{1}{x_2} < 1$.

因为 $h(x_1) = h(x_2) = 0$,

$$\text{所以 } h(x_2) - h\left(\frac{1}{x_2}\right) = h(x_2) - h\left(\frac{1}{x_2}\right) = \left(x_2^2 - \frac{2\ln x_2}{x_2} - a\right) - \left[\frac{1}{x_2^2} - \frac{2\ln \frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_2}} - a\right]$$

$$= \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2 - \frac{1}{x_2} - 2\ln x_2\right), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

设函数 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x (x > 1)$, 则 $\varphi'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 答案解析网

$$\text{所以 } \varphi(x_2) = x_2 - \frac{1}{x_2} - 2\ln x_2 > \varphi(1) = 0,$$

所以 $h(x_1) - h\left(\frac{1}{x_2}\right) > 0$, 即 $h(x_1) > h\left(\frac{1}{x_2}\right)$, 11 分

又函数 $h(x) = x^2 - \frac{2\ln x}{x} - a$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $0 < x_1 < \frac{1}{x_2} < 1$, 所以 $x_1 x_2 < 1$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

