深圳外国语学校 2023 届高三入学测试 数学试卷 参考答案

一、二、选择题：共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	C	A	C	A	A	B	BD	ACD	BCD	ABD

1．D

【详解】因为$A=\{x|x\geq 4\text{或}x\leq 0\}$，$B=\{x|x>4\text{或}x\leq -2\}$，

所以$A\cup B=\{x|x\geq 4\text{或}x\leq 0\}\cup\{x|x>4\text{或}x\leq -2\}=\{x|x\geq 4\text{或}x\leq 0\}$，

$A\cap B=\{x|x\geq 4\text{或}x\leq 0\}\cap\{x|x>4\text{或}x\leq -2\}=\{x|x>4\text{或}x\leq -2\}$.

由题意可知阴影部分对于的集合为$(\complement_U(A\cap B))\cap(A\cup B)$，

所以$\complement_U(A\cap B)=\{x|\ -2<x\leq 4\}$，$(\complement_U(A\cap B))\cap(A\cup B)=\{x|-2<x\leq 0\text{或}x=4\}$.故选：D.

2．C

【详解】因为复数z满足：$z^2-2z+2=0$，即$(z-1)^2=-1$，故$z=1+i$或$z=1-i$，

因为复数z所对应的点在第四象限，故复数$z=1-i$，所以$z^2=-2i$. 故选:C.

3．C

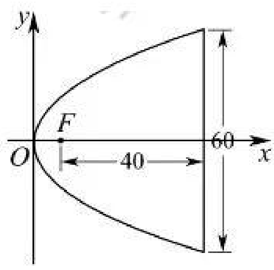
故$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}=29$，而又已知$\vec{a}\cdot\vec{b}=-24$，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，

所以$|\vec{a}|^2+4|\vec{a}|^2-96=29$，解得$|\vec{a}|=5$.故选：C

4．A

【详解】以抛物线的顶点为坐标原点建立平面直角坐标系如下图所示，设$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，则抛物线上一点的坐标为$\left(\frac{p}{2}+40,30\right)$，代入抛物线方程$y^2=2px(p>0)$得

$30^2=2p\left(\frac{p}{2}+40\right)$，解得$p=10$, $\frac{p}{2}=5$，所以光源到反射镜的顶点的距离为5cm.故选：A



5．C

【详解】因为函数$f(x)=(a-1)x|x-b+1|$为R上的奇函数，且递减，所以$a-1\neq 0$且$f(-1)=-f(1)$，

即$-(a-1)|-b|=-(a-1)|2-b|$，所以$|-b|=|2-b|$，解得$b=1$，经检验符合题意，

故$f(x)=(a-1)x|x|=\begin{cases}(a-1)x^2, x\geq 0\\ -(a-1)x^2, x<0\end{cases}$

因为函数$f(x)=(a-1)x|x|$在R上为减函数，所以$a-1<0$，所以$a<1$.故选：C.

6．A

【详解】对于$\forall x_0\in R$，设$a_n=f^{(n)}(x_0)$ $n\in N^*$，则$a_1=f^{(1)}(x_0)=f(x_0)=3x_0+2$，2,

$a_{n+1}=3a_n+2$，

所以$a_{n+1}+1=3a_n+3=3(a_n+1)$，所以$\{a_n+1\}$是以$3x_0+3$为首项，公比为 3 的等比数列.

$a_n+1=f^{(n)}(x_0)+1=(3x_0+3)3^{n-1}=3^n x_0+3^n$，

即$f^{(n)}(x_0)=3^n x_0+3^n-1$.所以$f^{(n)}(x)=3^n x+3^n-1$，故选：A.

7．A

【详解】设$|AB|=|AF_2|=m$, $|AF_1|=|AF_2|+2a=m+2a$, $|BF_1|=|BF_2|-2a=2m-2a$,

$|BF_1|^2+|BA|^2=|AF_1|^2$, $|BF_1|^2+|BF_2|^2=|F_1F_2|^2$,

$(2m-2a)^2+m^2=(m+2a)^2$①，$(2m-2a)^2+4m^2=4c^2$②,

由①可得$m=3a$, 代入②式化简得：$13a^2=c^2$,$\therefore 12a^2=b^2$,$\therefore \frac{b}{a}=2\sqrt{3}$，

所以双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm 2\sqrt{3}x$.故选：A

8．B

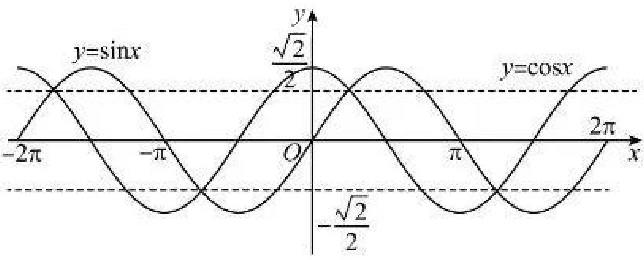
【详解】由$2m^2-2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot m+\sin 2x\le 0$，得$m^2-(\sin x+\cos x)\cdot m+\sin x\cdot\cos x\le 0$，

即$(m-\sin x)(m-\cos x)\le 0$,

由几何意义可知，函数$y=m$的图像在函数$y=\sin x$，$y=\cos x$的图像之间，如下图所示，

$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le m\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，

要使$b-a$达到最大，仅需要$m=-\frac{\sqrt{2}}{2}$或$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时$b-a=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\pi$.



故选：B.

9．BD

【详解】由$f(x)+g(x)=2^x$得$f(-x)+g(-x)=2^{-x}$，由于函数$f(x)$和$g(x)$分别为奇函数和偶函数，

所以$-f(x)+g(x)=2^{-x}$，因此$f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$, $g(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}$，对于 A，$f(x)-g(x)=-2^{-x}$,故 A 错误，

对于 B，由于函数$y=2^x$在$(-\infty,+\infty)$单调递增，$y=2^{-x}$在$(-\infty,+\infty)$单调递减，所以

$f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2}$在$(-\infty,+\infty)$单调递增，故 B 正确，

对于 C，$f'(x)=\frac{2^x\ln 2+2^{-x}\ln 2}{2}=\frac{(2^x+2^{-x})\ln 2}{2}\ge\frac{2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}\ln 2}{2}=\ln 2$, 当且仅当$x=0$时取等号,等号

而$\ln 2<1$，所以C错误，

对于D，$g(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\geq\frac{2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}}{2}=1$，当且仅当$x=0$时取等号，所以D正确，故选：BD

10．ACD

【详解】对于A，极差为$4-0=4$，中位数为$\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$，所以极差与中位数之积为$4\times\frac{3}{2}=6$，A对；

对于B，根据方差的性质可知，数据$4x_1-1,4x_2-1,\cdots,4x_n-1$的方差是$4^2\times 5=80$，B错；

对于C，由方差$s^2=\frac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots(x_n-\bar{x})^2\right]=0$，

可得$x_1=x_2=\cdots=x_n=\bar{x}$，即此组数据众数唯一，C对；

对于D，$\because\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x_0$ $\therefore x_1+x_2+\cdots+x_n=nx_0$，$\therefore\frac{x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n}{n+1}=\frac{x_0+nx_0}{n+1}=x_0$，D对.故选：ACD

11．BCD

【详解】对于A，因为$f(x+1)$是奇函数，所以$f(-x+1)=-f(x+1)$，故A错误；

因为$f(x+1)$是奇函数，所以$y=f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称，即有$f(x)=-f(2-x)$，

所以$g(2-x)=[1-(2-x)]f(2-x)=(x-1)f(2-x)=(1-x)f(x)=g(x)$，

所以$y=g(x)$的图象关于直线$x=1$对称，

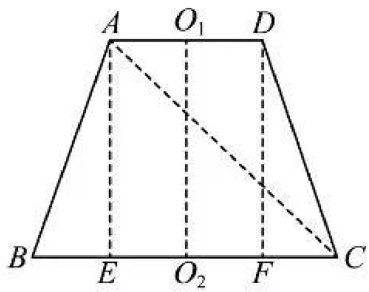
函数$g(x)$在$x\in[1,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)$在$x\in(-\infty,1]$上单调递减，故B正确；

因为$a<2-b<1$，所以$g(1)<g(2-b)<g(a)$，即$g(1)<g(b)<g(a)$，故C正确；

因为$g(a)>g(a+1)$，且$a<a+1$，由函数$y=g(x)$的图象关于直线$x=1$对称，得$\frac{a+(a+1)}{2}<1$，解得$a<\frac{1}{2}$，故C正确.故选：BCD.

12．ABD

【详解】取圆台的轴截面$ABCD$，设AD、BC的中点分别为O_1、O_2，连接O_1O_2，



分别过点A、D在平面$ABCD$内作$AE\perp BC$，$DF\perp BC$，垂足分别为点E、F，

由题意可知，O_1O_2与圆台的底面垂直，易知四边形$ABCD$为等腰梯形，

且$AB=CD=3$，$AD=2$，$BC=4$，

在$\triangle ABE$和$\triangle DCF$中，$AB=DC$，$\angle ABE=\angle DCF$，

$\angle AEB=\angle DFC=90^\circ$，所以，$\triangle ABE\cong\triangle DCF$，所以，$BE=CF$，

因为$AD//BC$，$AE\perp BC$，$DF\perp BC$，则四边形$ADFE$为矩形，且$EF=CD=2$，

同理可证四边形AEO_2O_1为矩形，则$O_1O_2=AE$，且$AE//O_1O_2$，

所以，AE与圆台的底面垂直，则圆台的母线与底面所成的角为$\angle ABE$，

所以，$BE=CF=\frac{AB-EF}{2}=\frac{4-2}{2}=1$，则$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$，

所以，$\tan\angle ABE=\frac{AE}{BE}=2\sqrt{2}$，A对；

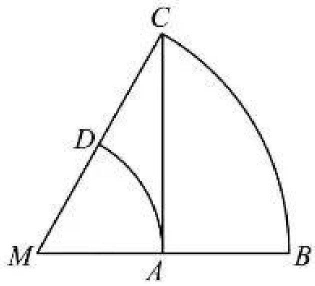
对于B选项，圆台的全面积为$\pi\times 1^2+\pi\times 2^2+\pi\times(1+2)\times 3=14\pi$，B对；

对于 C 选项，易知圆台的外接球球心在梯形$ABCD$内，且$CE=BC-BE=4-1=3$，

由勾股定理可得$AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{8+9}=\sqrt{17}$，且$\sin\angle ABE=\frac{AE}{AB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以，圆台的外接球直径为$2R=\frac{AC}{\sin\angle ABE}=\frac{\sqrt{17}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3\sqrt{34}}{4}$，则$R=\frac{3\sqrt{34}}{8}$，B 错；

对于C选项，将圆台沿着轴截面$ABCD$切开，将圆台的侧面的一半展开如下图所示：



延长BA、DC交于点M，在圆台的轴截面等腰梯形$ABCD$中，$AB//CD$且

$AB=\frac{1}{2}CD$，

易知A、D分别为BM、CM的中点，所以，$AM=DM=AB=3$，

设$\angle AMD=\theta$，则$\overset{\frown}{AD}=3\theta=\pi$，则$\theta=\frac{\pi}{3}$，

在$\triangle ACM$中，$AM=3$，$CM=6$，$\angle AMD=\frac{\pi}{3}$，

由余弦定理可得

$AC=\sqrt{AM^2+CM^2-2AM\cdot CM\cos\frac{\pi}{3}}\sqrt{3^2+6^2-2\times3\times6\times\frac{1}{2}}=3\sqrt{3}$，

因此，从点A经过圆台的表面到点C的最短距离为$3\sqrt{3}$，D 对.故选：ABD.

三、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.

13.0.51　　14. $13\pi(\text{cm})$　　15. 4　　16. $\sqrt{3}-1$或$\frac{\sqrt{6}}{3}$

13．0.51

【详解】记事件A_1为“钥匙掉在宿舍里”，A_2为“钥匙掉在教室里”，A_3为“钥匙掉在宿舍里”，

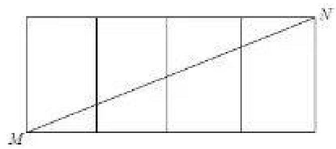
事件B为“找到钥匙”，由全概率公式得

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.5\times0.8+0.3\times0.3+0.2\times0.1=0.51$

14．$13\pi(\text{cm})$

【详解】根据题意，从圆柱底部M点绕圆柱体的侧面旋转 4 圈到达顶部的N点，

沿MN将侧面展开后，最短路程，如图所示，



其中矩形的高等于圆柱的高$5\pi(\text{cm})$，矩形的宽等于圆柱的底面圆的周长的 4

倍，即$4\times2\pi\times\frac{3}{2}=12\pi(\text{cm})$，

所以蜗牛爬行的最短路径为$MN=\sqrt{(5\pi)^2+(12\pi)^2}=13\pi(\text{cm})$.故答案为：$13\pi(\text{cm})$.

15．4

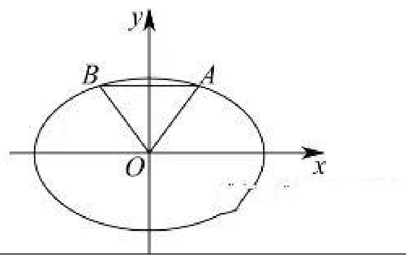
【详解】设地震强度为x，则地震级别为$f(x)=\lg x$，

由题意可令$\lg x=8.9, \lg t=8.3$，则$\lg x-\lg t=8.9-8.3=0.6$，

由于$\lg2\approx0.3$，故$\lg x-\lg t=2\lg2=\lg4$, $\therefore \lg\frac{x}{t}=\lg4$, $\frac{x}{t}=4$，

即日本 1923 年地震强度是8.3级的 4 倍，故答案为：4

16．$\sqrt{3}-1$或$\frac{\sqrt{6}}{3}$



【详解】不妨设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，

因为$\triangle OAB$是以半焦距为边长的正三角形，根据椭圆的对称性，

可知AB平行于x轴或AB平行于y轴；

当AB平行于x轴时，A, B关于y轴对称，不妨设点A在第一象限，

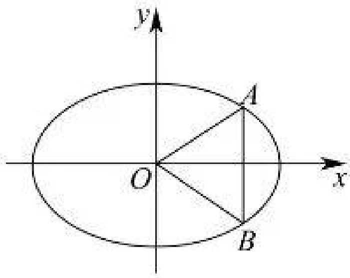
所以$\angle AOx=60^\circ$，$OA=c$，所以$A\left(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$，所以$\frac{c^2}{4a^2}+\frac{3c^2}{4b^2}=1$，

即$c^2(a^2-c^2)+3a^2c^2=4a^2(a^2-c^2)$，所以$c^4-8a^2c^2+4a^4=0$，

即$e^4-8e^2+4=0$，解得$e^2=4-2\sqrt{3}$或$e^2=4+2\sqrt{3}$（因为$0<e<1$，故舍去），所以$e=\sqrt{3}-1$；

当AB平行于y轴时，A, B关于x轴对称，所以$\angle AOx=30^\circ$，$OA=c$，

不妨设点A在第一象限，所以$A\left(\frac{\sqrt{3}c}{2},\frac{c}{2}\right)$，



所以$\frac{3c^2}{4a^2}+\frac{c^2}{4b^2}=1$，即$3c^2(a^2-c^2)+a^2c^2=4a^2(a^2-c^2)$，

即$3c^4-8a^2c^2+4a^4=0$，所以$3e^4-8e^2+4=0$，而$0<e<1$，

解得$e^2=\frac{2}{3}$或$e^2=2$（舍去），故$e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以椭圆的离心率为$\sqrt{3}-1$或$\frac{\sqrt{6}}{3}$，故答案为：$\sqrt{3}-1$或$\frac{\sqrt{6}}{3}$

四．解答题（共 6 小题）

17．【详解】(1) 由$\frac{a_{n+1}}{3a_n}=1+\frac{1}{n}$，得$\frac{a_{n+1}}{n+1}=3\times\frac{a_n}{n}$，------------------------------2 分

又$\frac{a_1}{1}=1$，∴ $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，-----------------------3 分

∴ $\frac{a_n}{n}=3^{n-1}$，$a_n=n\times3^{n-1}$，即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n\times3^{n-1}$.-----------------------------5 分

（2）由（1）知，$a_n=n\times3^{n-1}$，

则$S_n=1\times3^0+2\times3^1+\cdots+n\times3^{n-1}$，①--6 分

①×3得$3S_n=1\times3^1+2\times3^2+\cdots+n\times3^n$，②-------------------------------------7 分

①－②得$-2S_n=1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\times3^n$------------------------------------8 分

$=\frac{1-3^n}{1-3}-n\times3^n=\frac{3^n-1}{2}-n\times3^n$，--9 分

故$S_n=\frac{(2n-1)\times3^n+1}{4}$．---10 分

18．【详解】(1) 证明：因为四边形$ABCD$是矩形，所以，$BC//AD$，

因为$BC\subset$平面BCF，$AD\not\subset$平面BCF，所以$AD//$平面BCF，--------------------2 分

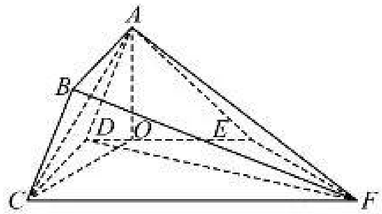
因为$DE//CF$，$CF\subset$平面BCF，$DE\not\subset$平面BCF，所以$DE//$平面BCF，----------4 分

因为$AD\cap DE=D$，AD、$DE\subset$平面ADE，则平面$BCF//$平面ADE，--------------5 分

因为$BF\subset$平面BCF，所以，$BF//$平面ADE.----------------------------6 分

（2）解：因为$CD\perp AD$，$CD\perp DE$，所以，二面角$A-CD-F$的平面角为$\angle ADE$，----------7 分

由题意可得$\angle ADE=45^{\circ}$，



又因为$AD\cap DE=D$，AD、$DE\subset$平面ADE，所以，$CD\perp$平面ADE，

过点A在平面ADE内作$AO\perp DE$，垂足为点O，

因为$AO\subset$平面ADE，所以$CD\perp AO$，--------------------------------8 分

又因为$CD\cap DE=D$，CD、$DE\subset$平面$CDEF$，所以$AO\perp$平面$CDEF$，

连接CO，所以直线AC与平面$CDEF$所成角为$\angle ACO$，------------------------9 分

因为$CD\perp AD$，$AD=2$，$DC=3$，则$AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

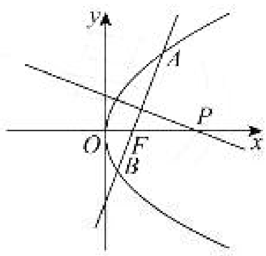
因为$AO\perp DE$，则$AO=AD\sin\angle ADE=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，----------------11 分

所以$\sin\angle ACO=\frac{AO}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{26}}{13}$.直线$AC$与平面$CDEF$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{26}}{13}$ ------------------------12 分

19.【详解】（1）因为抛物线C的焦点F到准线l的距离为2，所以$p=2$，----------2 分

根据建系方案的不同，抛物线的标准方程有四种可能，

分别是$y^2=4x$，$y^2=-4x$，$x^2=4y$，$x^2=-4y$.-------------------------------------4 分



（2）在平面直角坐标系中，抛物线的位置并不影响$\frac{|FP|}{|AB|}$的取值，因此不妨取抛物线的方程为$y^2=4x$，此时焦点$F(1,0)$，根据题意，直线AB的斜率存在且不为0，因此设直线AB的方程为$x=my+1$，---------------5 分

与抛物线$y^2=4x$联立，得关于y的一元二次方程$y^2-4my-4=0$，-----------6 分

则$\Delta=16m^2+16>0$，设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，

则$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，$|y_1-y_2|=\sqrt{16m^2+16}$，------------------------7 分

$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$，---8 分

则$|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_2|=4(1+m^2)$，----------------------------------9 分

线段AB的中点坐标为$(2m^2+1,2m)$，中垂线方程为$y-2m=-m(x-2m^2-1)$，

令$y=0$，解得$x=3+2m^2$，即中垂线与x轴交于$P(3+2m^2,0)$，-----------10 分

所以$|FP|=2+2m^2$，---11 分

则$\frac{|FP|}{|AB|}=\frac{1}{2}$.--12 分

20.【详解】（1）由题意得$BQ=20\text{m}$，$QC=10\text{m}$，$\angle B=\angle C=\frac{\pi}{4}$，

因为$\angle MQN=\frac{\pi}{2}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$，四边形内角和等于2π，所以$\angle AMQ+\angle ANQ=\pi$，

又$\angle AMQ+\angle BMQ=\pi,\angle ANQ+\angle CNQ=\pi$，--------------------1 分

所以$\angle CNQ+\angle BMQ=\pi$，$\sin\angle CNQ=\sin\angle BMQ$，------------------------2 分

在$\triangle BMQ$中，由正弦定理得$\frac{MQ}{\sin B}=\frac{BQ}{\sin\angle BMQ}$，------------------------3 分

在$\triangle CQN$中，由正弦定理得$\frac{NQ}{\sin C}=\frac{CQ}{\sin\angle CNQ}$，--------------------4 分

所以$\frac{MQ}{NQ}=\frac{BQ}{QC}=2$，证毕；--5 分

（2）由题意得$AB=AC=15\sqrt{2}\text{m}$，故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=225\ \text{m}^2$，---------------6 分

因为$\angle MQN=\frac{\pi}{2}$，$\angle NQC=\theta$，所以$\angle BQM=\frac{\pi}{2}-\theta$，

因为$\angle C=\frac{\pi}{4}$，所以$\angle QNC=\frac{3\pi}{4}-\theta$，--7 分

设$QN=x\text{m}$，则$QM=2x\text{m}$，

在$\triangle CQN$中，由正弦定理得$\frac{NQ}{\sin C}=\frac{CQ}{\sin\angle CNQ}$，即$\frac{x}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{10}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\theta)}$，

解得$x=\frac{10\sin\frac{\pi}{4}}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\theta)}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\theta)}$①，--8 分

由三角形面积公式得$S_{\triangle CNQ}=\frac{1}{2}CQ\cdot QN\sin\angle CQN=5x\sin\theta$，

$S_{\triangle BMQ}=\frac{1}{2}BQ\cdot QM\sin\angle BQM=20x\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=20x\cos\theta$，--------------------9 分

故$S_{\triangle CNQ}+S_{\triangle BMQ}=5x\sin\theta+20x\cos\theta=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{225}{2}$，

所以$x=\frac{45}{2(\sin\theta+4\cos\theta)}$②，---10 分

由①②得$\frac{5\sqrt{2}}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\theta)}=\frac{45}{2(\sin\theta+4\cos\theta)}$，

化简得$\frac{\sin\theta+4\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{9}{2}$，--11 分

分子分母同除以$\cos\theta$得$\frac{\tan\theta+4}{\tan\theta+1}=\frac{9}{2}$，解得$\tan\theta=-\frac{1}{7}$---------------------------12 分

21．【详解】（1）X的取值可能为 1，2，3，4，5，6．-----------------------------------1 分

$P(X=1)=P(X=6)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，$P(X=2)=P(X=5)=C_5^1\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$，

$P(X=3)=P(X=4)=C_5^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$．---------------------------------------2 分

因为$Y=|20-5X|$，所以Y的取值可能为 0，5，10，15．

$P(Y=0)=P(X=4)=\frac{5}{16}$，$P(Y=5)=P(X=3)+P(X=5)=\frac{15}{32}$，

$P(Y=10)=P(X=2)+P(X=6)=\frac{3}{16}$，$P(Y=15)=P(X=1)=\frac{1}{32}$．--------------------3 分

Y的分布列为

Y	0	5	10	15
P	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{32}$

$E(Y)=0\times\frac{5}{16}+5\times\frac{15}{32}+10\times\frac{3}{16}+15\times\frac{1}{32}=\frac{75}{16}\approx4.7$，--------------------------------------4 分

则顾客玩一次游戏，立减金额的均值约为 4.7 元，又该商品成本价是 10 元，

所以该商品的最低定价约为 15 元．---5 分

（2）由（1）得$P(X=3)=\frac{5}{16}$．

进行 79 次试验，设小球落入 3 号球槽的个数为ξ，则$\xi\sim B\left(79,\frac{5}{16}\right)$．------------------------------6 分

$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=1+\frac{(79+1)\times\frac{5}{16}-k}{k\left(1-\frac{5}{16}\right)}=1+\frac{25-k}{\frac{11k}{16}}$．--8 分

当$k<25$时，$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}>1$，即$P(\xi=k)>P(\xi=k-1)$；-----------------------------9 分

当$k=25$时，$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}=1$，即$P(\xi=k)=P(\xi=k-1)$；-----------------------------10 分

当$k>25$时，$\frac{P(\xi=k)}{P(\xi=k-1)}<1$，即$P(\xi=k)<P(\xi=k-1)$．--11 分

所以当$k=25$时，$P(\xi=25)=P(\xi=24)$，此时这两项概率均为最大值．

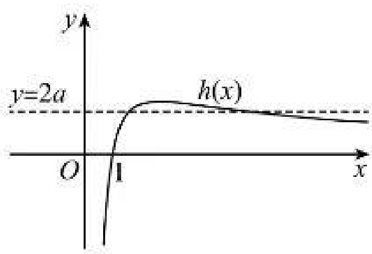
故 3 号球槽中落入 24 或 25 个小球的概率最大．--12 分

22．【详解】（1）由题意可知，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\ln x+2ax$．

令$f'(x)=0$，可得$2a=\frac{\ln x}{x}$，--1 分

令$h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令$h'(x)=0$得$x=e$，------------------------------2 分

当$0<x<e$时，$h'(x)>0$，当$x>e$时，$h'(x)<0$，



可知$h(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，-

-----------------------------3 分

所以$h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$，

又当$0<x<1$时，$h(x)<0$，当$x>1$时，$h(x)>0$，

根据以上信息，作出$h(x)$的大致图象，

--4 分

则由题意可知$y=2a$与函数$h(x)$的图象有两个不同的交点，

所以$2a\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，$\therefore a\in\left(0,\frac{1}{2e}\right)$.------------------------------5 分

（2）当$a=1$时，$f(x)=-x\ln x+x^2+x$，由$2k(x-2)+f(x)<g(x)$得

$2k(x-2)<x\ln x+x$，

因为$x>2$，所以$2k<\frac{x\ln x+x}{x-2}$.------------------------------6 分

设$F(x)=\frac{x\ln x+x}{x-2}(x>2)$，则$F'(x)=\frac{x-4-2\ln x}{(x-2)^2}$，------------------------------7 分

令$m(x)=x-4-2\ln x(x>2)$，则$m'(x)=1-\frac{2}{x}>0$，

所以$m(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增，------------------------------8 分

又$m(8)=4-2\ln 8<4-2\ln e^2=0$，$m(10)=6-2\ln 10>6-2\ln e^3=0$，

所以$m(x)$在$(8,10)$上有唯一的零点x_0，即$x_0-4-2\ln x_0=0$，------------------------------9 分

当$2<x<x_0$时，$m(x)<0$，即$F'(x)<0$，当$x>x_0$时，$m(x)>0$，即$F'(x)>0$，

所以$F(x)_{\min}=F(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-2}=\frac{x_0\left(1+\frac{x_0-4}{2}\right)}{x_0-2}=\frac{x_0}{2}$，------------------------------10 分

所以$2k<\frac{x_0}{2}$，又$x_0\in(8,10)$，所以$\frac{x_0}{2}\in(4,5)$，------------------------------11 分

又$k\in N^*$，所以k的最大值为 2.------------------------------12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。