高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

x<3

1. 已知集合 $A=\{x|\log_3 x\leq 1\}$，$B=\{x|0<x<a\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是

A. $[3,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

2. 设复数 z 满足 $1-3z=iz$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

3. 已知向量 a，b 满足 $|a|=\sqrt{6}$，$|b|=\sqrt{2}$，$(a-b)\cdot b=1$，则向量 a，b 夹角的大小等于

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 120°

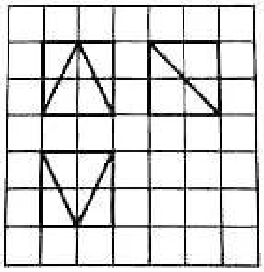
4. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，P 是 C 上一点，若点 P 的纵坐标为2，且 $|PF|=2$，则 $p=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 若 $(x+2)^n=x^n+\cdots+ax^3+bx^2+cx+2^n(n\in\mathbf{N},n\geq 3)$，且 $3a=2b$，则 n 的值为

A. 4　　B. 6　　C. 12　　D. 18

6. 如图是某几何体的三视图，图中小方格的边长为1，则该几何体的体积为



A. $\frac{22}{3}$　　B. $\frac{17}{3}$　　C. 6　　D. $\frac{20}{3}$

7. 碳-14测年法是由美国科学家马丁·卡门与同事塞缪尔·鲁宾于1940年发现的一种测定含碳物质年龄的方法，在考古中有大量的应用. 其原理为：宇宙射线中的中子与氮-14反应产生碳-14，而碳-14会发生衰变变成氮-14，由此构建一个核素平衡. 空气中的碳-14与氧反应生成的二氧化碳被生物圈接收，活体生物体内的碳-14和碳-12浓度比例是一定的，只有当生物死亡后，碳循环中断，碳-14会衰

变并逐渐消失．放射性元素的衰变满足规律 $N=N_0e^{-\lambda t}$（N_0 表示的是放射性元素在生物体中最初的含量 N_0 与经过时间 t 后的含量 N 间的关系，其中 $\lambda=\frac{\ln 2}{T}$（T 为半衰期））．已知碳-14 的半衰期为 5 730 年，$N_0=1.2\times10^{-12}$，经测量某地出土的生物化石中碳-14 含量为 4×10^{-13}，据此推测该化石活体生物生活的年代距今约（结果保留整数，参考数据 $\log_2 3\approx1.585$）

A. 7 650 年　　B. 8 890 年

C. 9 082 年　　D. 10 098 年

8. 倾斜角为 45°的直线 l 将圆 $C:x^2+y^2=4$ 分割成弧长的比值为 $\frac{1}{2}$ 的两段弧，则直线 l 在 y 轴上的截距为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. ±1　　D. $\pm\sqrt{2}$

9. 给出下列四种图象的变换方法：

①将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；②将图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度；

③将图象向左平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度；④将图象向右平移 $\frac{3\pi}{8}$ 个单位长度．

利用上述变换中的某些方法，能由函数 $y=\sin 4x$ 的图象得到函数 $y=-2\sin 2x\cos 2x$ 的图象的变换方法是

A. ①②　　B. ②③　　C. ①④　　D. ③④

10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp CB$，其外接球的体积为 36π，若 $AC=x$，$BC=y$，$AP=z$，则 $xy+yz+zx$ 的最大值为

A. 36　　B. 32　　C. 24　　D. 12

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $3S_n=64-a_n$，若 $a_m\cdot a_k=1$（$1\leqslant m<k$，$m,k\in\mathbf{N}^*$），则 k 的取值集合是

A. $\{1,2\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{4,5\}$　　D. $\{3,4,5\}$

12. 已知函数 $f(x)=\sin x-x^2+\pi x$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$，则满足 $f(\pi-a)>f\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$ 的实数 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$　　D. $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x)=x\ln x$ 的图象在点 $(e,f(e))$ 处的切线方程为__________．

14. 已知实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y-4\leqslant0,\\ x-y-1\geqslant0,\\ 2x-6y-3\leqslant0,\end{cases}$ 则 $z=2x+3y$ 的最大值为__________．

15. "杨辉三角"是二项式系数在三角形中的一种几何排列．在欧洲，这个表叫做帕斯卡三角形．帕斯卡（1623～1662）是在 1654 年发现这一规律的，比杨辉要迟 393 年．"杨辉三角"是中国古代数学的杰出研究成果之一，它把二项式系数图形化，把组合数内在的一些代数性质直观地从图形中体现出来．下面数表类似"杨辉三角"，从上到下分别为第 1 行、第 2 行、第 3 行、…、第 n 行、…．它满足：①第 n 行首尾的数均为 n；②第 $n(n\geqslant3)$ 行除首尾的数外，每一个数都等于它肩上（即第 $n-1$ 行）两个数之和．记第 $n(n\geqslant2)$ 行的第二个数为 $f(n)$，则 $f(60)=$__________．

1

2　2

3　4　3

4　7　7　4

…　…　…　…

16. 已知曲线 C: $\frac{x|x|}{4}+y|y|=1$，点 $P(m,n)$ 为曲线 C 上任意一点，若点 $A(-2,1)$，$B(4,-2)$，则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\sin(A+B)=c\sin\frac{B+C}{2}$.

(1) 求角 A 的大小；

(2) 若角 B 为钝角，求 $\frac{b}{c}$ 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

德、智、体、美、劳是对人的素质定位的基本准则，也是人类社会教育的趋向目标，所以人类社会的教育就离不开德、智、体、美、劳这个根本. 随着国家对体育、美育的高度重视，不少省份已经宣布将体育、美育纳入中考范畴. 在近期召开的教育部新闻发布会上，教育部体育卫生与艺术教育司司长透露，目前全国已有 4 个省份开展美育中考计分，同时还有 6 个省份、12 个地市开始（启动）了中考美育计分，分值在 10 分到 40 分之间. 到 2022 年力争全覆盖，全面实行美育中考. 同时，为体育、美育纳入高考做好前期准备工作. 某学校为了提升学生的体育水平，决定本学期开设足球课，某次体育课上，体育器材室的袋子里有大小，形状相同的 2 只黄色足球和 3 只白色足球. 现从袋子里依次随机取球.

(1) 若有放回地取 3 次，每次取一个球，求取出 1 个黄色足球 2 个白色足球的概率；

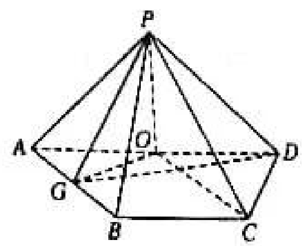
(2) 若无放回地取 3 次，每次取一个球，若取出每只黄色足球得 1 分，取出每只白色足球不得分，求得分 X 的分布列和数学期望.

19.（本小题满分 12 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\parallel BC$，$AD\perp CD$，且 $AD=2BC=2CD=4$，$PA=PD=2\sqrt{2}$，AD，AB 的中点分别是 O，G.

(1) 求证：$GO\perp$ 平面 POC；

(2) 求二面角 $D-PG-O$ 的余弦值.



20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，短轴长等于焦距，且经过点 $P(0,1)$.

(1)求椭圆 E 的方程；

(2)设过点 F 且不与坐标轴垂直的直线 l 与 E 交于 A，B 两点，若以 AB 为直径的圆与 y 轴交于点 M，且 $|MA|=|MB|$，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{2a}{x}-\ln x+2(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的极值；

(2)设 $g(x)=f(x)+2a\ln x+x$，若 $g(x)$ 有三个零点，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

已知曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=4-t,\\ y=\frac{t}{3}\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(1)求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

(2)设 C_1 与 C_2 交于 A，B 两点，点 $P(4,0)$，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知函数 $f(x)=|2x-5|+|2x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 10$ 的解集；

(2)若 $-x^2+2x-1+a\leqslant f(x)$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

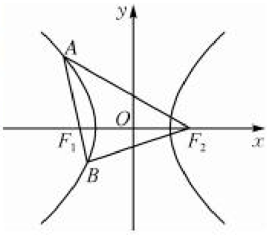
1. B　由 $\log_3 x\leqslant 1$，得 $0<x\leqslant 3$，即 $A=\{x|0<x\leqslant 3\}$. 又 $B=\{x|0<x<a\}$，且 $A\subseteq B$，所以实数 a 的取值范围是 $(3,+\infty)$. 故选 B.

2. A　当 $a=2$ 时，可以推出 $l_1/\!/l_2$；当 $l_1/\!/l_2$ 时，可得 $a=2$ 或 $a=-1$. 所以"$a=2$"是"$l_1/\!/l_2$"的充分不必要条件. 故选 A.

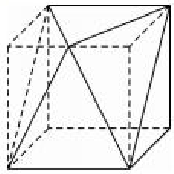
3. B　设 $P(x_0,2)$，由 $\begin{cases}x_0+\dfrac{p}{2}=2,\\ 2^2=2px_0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=2,\\ x_0=1.\end{cases}$ 故选 B.

4. A　由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=1$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+(\sqrt{2})^2=3$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为 30°. 故选 A.

5. C　根据双曲线的定义，得 $|AF_2|-|AF_1|=1$，$|BF_2|-|BF_1|=4$，两式相加得 $|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=8$，即 $|AF_2|+|BF_2|-|AB|=8$，又 $|BF_2|=|AB|$，所以 $|AF_2|=8$. 故选 C.



6. D　由三视图知该几何体为正方体截去了两个相同的三棱锥（如图），所以该几何体的体积为 $2\times2\times2-2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times2=8-\dfrac{4}{3}=\dfrac{20}{3}$. 故选 D.



7. C　由题意知 $t=\dfrac{T\cdot\ln\dfrac{N_0}{N}}{\ln 2}=\dfrac{5\,730\times\ln\dfrac{1.2\times10^{-12}}{4\times10^{-13}}}{\ln 2}=\dfrac{5\,730\ln 3}{\ln 2}=5\,730\log_2 3\approx5\,730\times1.585=9\,082.05\approx9\,082$. 故选 C.

8. A　$y=-2\sin 2x\cos 2x=-\sin 4x$. 因为 $\sin 4\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin(4x-\pi)=-\sin 4x$，所以①适合；因为 $\sin 4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin(4x+\pi)=-\sin 4x$，所以②适合；因为 $\sin 4\left(x+\dfrac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x+\dfrac{3\pi}{2}\right)=-\cos 4x$，所以③不适合；因为 $\sin 4\left(x-\dfrac{3\pi}{8}\right)=\sin\left(4x-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos 4x$，所以④不适合. 故选 A.

9. D　设两耳所在双曲线的实轴长为 $2a$，焦距为 $2c$，虚轴长为 $2b$，则 $2a=3\times10^{-5}\times334=0.01\,002(\mathrm{m})$，$2c=0.2(\mathrm{m})$，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{b}{a}$，所以 $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{a}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2a}{2c}=\dfrac{0.01\,002}{0.2}=0.0\,501\approx0.05$. 故选 D.

10. A　设三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 R，则 $\dfrac{4\pi R^3}{3}=36\pi$，所以 $R=3$. 又 $2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，所以 $x^2+y^2+z^2=36$，所以 $xy+yz+zx\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}+\dfrac{y^2+z^2}{2}+\dfrac{z^2+x^2}{2}=x^2+y^2+z^2=36$，当且仅当 $x=y=z=2\sqrt{3}$ 时，等号成立. 故选 A.

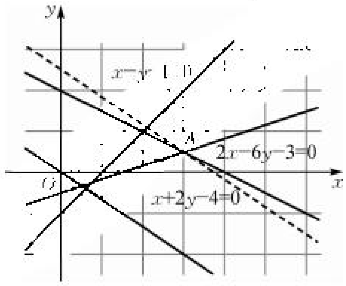
11. C　当 $n=1$ 时，$3a_1=64-a_1$，解得 $a_1=16$；当 $n\geqslant2$ 时，$3S_n=64-a_n$ 和 $3S_{n-1}=64-a_{n-1}$ 两式相减，得 $3a_n=a_{n-1}-a_n$，即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{4}$，则数列 $\{a_n\}$ 是首项为 16、公比为 $\dfrac{1}{4}$ 的等比数列，即各项依次为 $16,4,1,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{64},\cdots$，所以 $a_1a_5=1$，$a_2a_4=1$，$a_3=1$，结合 $1\leqslant m<k$，得 k 的取值集合是 $\{4,5\}$. 故选 C.

12. B　函数 $y=\sin x$ 和 $y=-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{\pi^2}{4}$ 的图象在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上都关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，且它们都在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减，则函数 $f(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{\pi^2}{4}$ 的图象在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，且在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上单调递减. 由 $f(\pi-a)>f\left(\dfrac{\pi}{2}+a\right)$，得 $\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\pi-a\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+a\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\\ \left|\pi-a-\dfrac{\pi}{2}\right|<\left|\dfrac{\pi}{2}+a-\dfrac{\pi}{2}\right|,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3\pi}{2},\\ -\pi\leqslant a\leqslant\pi,\\ \left|\frac{\pi}{2}-a\right|<|a|,\end{cases}$ 解得$\frac{\pi}{4}<a\leqslant\pi$. 故选 B.

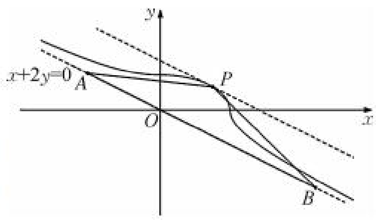
13. $2x-y-e=0$　因为 $f(e)=e$, $f'(x)=\ln x+1$, 则 $f'(e)=2$, 所以所求切线方程为 $y-e=2(x-e)$, 即 $2x-y-e=0$.

14. $\frac{15}{2}$　画出可行域(如图阴影部分), 当直线 $2x+3y=z$ 过点 $A\left(3,\frac{1}{2}\right)$时, z 取得最大值, 所以 $z_{\max}=2\times3+3\times\frac{1}{2}=\frac{15}{2}$.



15. ①$\frac{a}{\tan\alpha}$　②$\frac{a\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$　①$\angle PBA=\alpha$, 由$\frac{PA}{AB}=\tan\alpha$, 得 $AB=\frac{a}{\tan\alpha}$; ②$\angle APB=\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\angle PBA=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta$, 由正弦定理, 得$\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta\right)}=\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$, 解得 $AB=\frac{a\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}$.

16. $3\sqrt{2}$　曲线 C 是由$\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$、$\frac{x^2}{4}-y^2=1(x>0,y<0)$以及 $y^2-\frac{x^2}{4}=1(x<0,y>0)$三部分构成(如图所示), $|AB|=\sqrt{(4+2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$, 且过 AB 的直线方程为 $x+2y=0$, 并且直线 $x+2y=0$ 为双曲线 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$ 和$\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线, 设过点 P 且与直线 $x+2y=0$ 平行的直线方程为 $x+2y+t=0$, 由图知, 当直线$x+2y+t=0(t<0)$与曲线$\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\geqslant0,y\geqslant0)$相切时, 切点到直线 $x+2y=0$ 距离最大, 联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x+2y+t=0,\end{cases}$ 消去 x 得 $8y^2+4ty+t^2-4=0$, $\Delta=16t^2-4\times8(t^2-4)=0$, 解得 $t=-2\sqrt{2}$(正根舍), 所以 $x+2y-2\sqrt{2}=0$, 所以点 P 到直线 $x+2y=0$ 的最大距离即为直线 $x+2y=0$ 与直线 $x+2y-2\sqrt{2}=0$ 之间的距离, 所以最大距离 $d=\frac{|2\sqrt{2}|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, 所以$\triangle PAB$ 面积的最大值为$\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=3\sqrt{2}$.



17. 解: (1)因为 $a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$, 所以$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1$, ………… 2 分

又 $a_1=1$, 所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列. ………… 4 分

所以$\frac{1}{a_n}=n$, 所以 $a_n=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$. ………… 6 分

(2)由(1)得 $b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, ………… 8 分

所以 $S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$. ………… 10 分

18. 解: (1)因为 $a\sin(A+B)=c\sin\frac{B+C}{2}$, 所以 $a\sin C=c\cos\frac{A}{2}$, ………… 2 分

由正弦定理, 得 $\sin A\sin C=\sin C\cos\frac{A}{2}$. ………… 4 分

由 $0<C<\pi$, 得 $\sin C\neq0$, 所以 $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A}{2}$, 因为$\frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$,

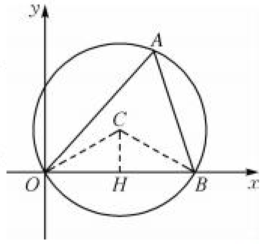
所以$\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$, 所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ………… 6 分

(2)由 B 为钝角, 得$\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\ B=\pi-\frac{\pi}{3}-C>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $0<C<\frac{\pi}{6}$, 从而 $0<\tan C<\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………… 8 分

由正弦定理，得 $\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin C}=\frac{\frac{1}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C}{\sin C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}>\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=2$，

故 $\frac{b}{c}$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$. ………… 12分

19. 解：(1)如图，设 OB 的中点为 H，连接 CH，则 $CH\perp OB$.



由正弦定理，得圆 C 的半径为 $R=\frac{1}{2}\times\frac{OB}{\sin\angle OAB}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2$. ………… 2分

由 $\angle OAB=60^\circ$，得 $\angle OCH=60^\circ$，所以 $|CH|=1$，又 $|OH|=\sqrt{3}$，所以 $C(\sqrt{3},1)$，

所以圆 C 的方程为 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$. ………… 4分

(2)直线 BC 的斜率为 $k_{BC}=\frac{1-0}{\sqrt{3}-2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以圆 C 在点 B 处的切线的斜率为 $\sqrt{3}$，

故圆 C 在点 B 处的切线方程为 $y=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$，即切线方程为 $\sqrt{3}x-y-6=0$. ………… 6分

(3)①当直线 AB 的斜率存在时，由 $B(2\sqrt{3},0)$，可设直线 AB 的方程为 $y=k(x-2\sqrt{3})$，即 $kx-y-2\sqrt{3}k=0$，

………… 7分

则圆心 C 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|k\times\sqrt{3}-1-2\sqrt{3}k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|\sqrt{3}k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$， ………… 8分

所以 $|AB|=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{(\sqrt{3}k+1)^2}{k^2+1}}=2$，解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………… 9分

由 A 在 x 轴的上方及(2)，可得 $k<0$ 或 $k>\sqrt{3}$，因此 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 不适合题意，应舍去. ………… 10分

②当直线 AB 的斜率不存在时，$AB\perp x$ 轴，此时 O,C,A 三点共线，显然 $|AB|=2$，此时 $A(2\sqrt{3},2)$. ………… 11分

综上，存在点 $A(2\sqrt{3},2)$，使得 $|AB|=2$. ………… 12分

20. (1)证明：连接 OB,BD，易证四边形 $OBCD$ 为正方形，

所以 $BD\perp OC$. ………… 1分

因为 AD,AB 的中点分别是 O,G，所以 $GO/\!/BD$，

所以 $GO\perp OC$， ………… 2分

因为 $PA=PD$，AD 的中点是 O，所以 $PO\perp AD$. ………… 3分

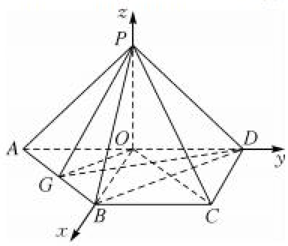
因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$. ………… 5分

又 $GO,OC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp GO$，$PO\perp OC$，

又因为 $OC\cap PO=O$，所以 $GO\perp$ 平面 POC. ………… 6分

(2)解：由(1)知 OB,OD,OP 两两垂直，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



因为 $AD=2BC=2CD=4$，$PA=PD=2\sqrt{2}$，

所以 $PO=OA=OB=OD=2$，

则点 $P(0,0,2)$，$D(0,2,0)$，$O(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$G(1,-1,0)$.

所以 $\overrightarrow{OG}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{DG}=(1,-3,0)$，$\overrightarrow{PG}=(1,-1,-2)$. ………… 7分

由(1)知 $PO\perp OC$，$GO\perp OC$，又 $PO\cap GO=O$，$PO,GO\subset$ 平面 PGO，

所以 $OC\perp$ 平面 PGO，所以 $\overrightarrow{OC}=(2,2,0)$ 为平面 PGO 的一个法向量； ………… 8分

又设平面 PGD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{PG},\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{DG},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PG}=x-y-2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DG}=x-3y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}z=y,\\ x=3y,\end{cases}$

取 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(3,1,1)$. ………… 10分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{OC},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OC}||\boldsymbol{n}|}=\frac{(2,2,0)\cdot(3,1,1)}{2\sqrt{2}\times\sqrt{11}}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

由图知二面角 $B-PD-C$ 为锐角，

所以二面角 $D-PG-O$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{22}}{11}$. ………… 12分

21. 解：(1)由椭圆 E 经过点 $P(0,1)$，得 $b=1$；

由短轴长等于焦距，得 $2b=2c$，则 $c=1$， ………… 2分

所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………… 4 分

(2)设直线 l 的方程为 $x=ty+1(t\neq0)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\ x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 得 $(t^2+2)y^2+2ty-1=0$,

由题意,得 $\Delta>0$,且 $y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+2}$, $y_1y_2=-\frac{1}{t^2+2}$, ………………………………………… 6 分

设 $M(0,u)$,线段 AB 的中点为 $N(x_0,y_0)$,则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{t}{t^2+2}$, $x_0=ty_0+1=\frac{2}{t^2+2}$.

由 $|MA|=|MB|$,得 $MN\perp AB$,即 $\frac{u+\frac{t}{t^2+2}}{-\frac{2}{t^2+2}}\cdot\frac{1}{t}=-1$,解得 $u=\frac{t}{t^2+2}$. ………………………………………… 8 分

由 $MA\perp MB$,得 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x_1x_2+(y_1-u)(y_2-u)=(ty_1+1)(ty_2+1)+(y_1-u)(y_2-u)=(t^2+1)y_1y_2+(t-u)(y_1+y_2)+u^2+1=0$,

即 $(t^2+1)\cdot\frac{-1}{t^2+2}+\left(t-\frac{t}{t^2+2}\right)\cdot\frac{-2t}{t^2+2}+\left(\frac{t}{t^2+2}\right)^2+1=0$, ………………………………………… 10 分

解得 $t=\pm1$,所以直线 l 的方程为 $x=\pm y+1$,即 $x-y-1=0$ 或 $x+y-1=0$. ………………………………………… 12 分

22. 解:(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=-\frac{2a}{x^2}-\frac{1}{x}=-\frac{2a+x}{x^2}$, ………………………………………… 1 分

当 $a\geqslant0$ 时, $2a\geqslant0$, $x>0$,则 $2a+x>0$,则 $f'(x)<0$,故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,无极值; ………… 2 分

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $x>-2a$;令 $f'(x)>0$,得 $0<x<-2a$,

故 $f(x)$ 在 $(0,-2a)$ 上单调递增,在 $(-2a,+\infty)$ 上单调递减,所以 $f(x)$ 在 $x=-2a$ 处取得极大值 $1-\ln(-2a)$,无极小值. ………………………………………… 4 分

(2)由题意, $g(x)=f(x)+2a\ln x+x=\frac{2a}{x}-\ln x+2+2a\ln x+x=(2a-1)\ln x+\frac{2a}{x}+x+2$,

$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$g'(x)=\frac{2a-1}{x}-\frac{2a}{x^2}+1=\frac{x^2+(2a-1)x-2a}{x^2}=\frac{(x-1)(x+2a)}{x^2}(x>0)$. ………………………………………… 5 分

①若 $a\geqslant0$,则当 $x\in(0,1)$ 时, $g'(x)<0$,则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)$ 至多有两个零点,不合题意; ………………………………………… 6 分

②若 $a=-\frac{1}{2}$,则 $x\in(0,+\infty)$, $g'(x)\geqslant0$(仅 $g'(1)=0$). $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $g(x)$ 至多有一个零点,不合题意; ………………………………………… 7 分

③若 $-\frac{1}{2}<a<0$,则 $0<-2a<1$,当 $x\in(0,-2a)$ 或 $x\in(1,+\infty)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(0,-2a)$, $(1,+\infty)$ 上单调递增;当 $x\in(-2a,1)$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(-2a,1)$ 上单调递减,要使 $g(x)$ 有三个零点,必须有 $\begin{cases}g(-2a)>0\\ g(1)<0\end{cases}$ 成立.

若 $g(1)<0$,得 $a<-\frac{3}{2}$,这与 $-\frac{1}{2}<a<0$ 矛盾,所以 $g(x)$ 不可能有三个零点(由 $g(1)=2a+3>0$,所以 $g(x)$ 至多有一个零点,不合题意); ………………………………………… 8 分

④若 $a<-\frac{1}{2}$,则 $-2a>1$. 当 $x\in(0,1)$ 或 $x\in(-2a,+\infty)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(0,1)$, $(-2a,+\infty)$ 上单调递增;当 $x\in(1,-2a)$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(1,-2a)$ 上单调递减,要使 $g(x)$ 有三个零点,必须有 $\begin{cases}g(1)>0\\ g(-2a)<0\end{cases}$ 成立,

由 $g(1)>0$,得 $a>-\frac{3}{2}$,由 $g(-2a)=(2a-1)[\ln(-2a)-1]<0$ 及 $a<-\frac{1}{2}$,得 $a<-\frac{e}{2}$,

所以 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$.

并且当 $-\frac{3}{2}<a<-\frac{e}{2}$ 时, $0<e^{-2}<1$, $e^2>-2a$, $g(e^{-2})=4+e^{-2}+2a(e^2-2)<4+e^{-2}-e(e^2-2)<4+1-5e<0$,

$g(e^2)=e^2+2a(e^{-2}+2)>e^2-3(e^{-2}+2)=e^2-6-3e^{-2}>e^2-7>0$. ………………………………………… 11 分

综上所述,使 $g(x)$ 有三个零点的实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{3}{2},-\frac{e}{2}\right)$. ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。