贵州天之王教育

2023届全国甲卷高端精品押题卷

数学理科参考答案(二)

1.【答案】A

【解析】$B=\{x|-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$,所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$,故选 A.

2.【答案】C

【解析】依题意 $a>0$ 且 $a-1>0$,得 $a>1$,故选 C.

3.【答案】D

【解析】$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,故选 D.

4.【答案】D

【解析】由题意得,$\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$,故选 D.

5.【答案】B

【解析】$a=\sqrt{e}>1$,$1>b=\ln\sqrt{3}>\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$,$c=e^{-\ln 2}=\frac{1}{2}$,所以 $a>b>c$,故选 B.

6.【答案】D

【解析】由题意得 $-1<3-2x<1$,得 $1<x<2$,故原不等式的解集为$(1,2)$,故选 D.

7.【答案】C

【解析】连接 BF,则$\angle BDF$ 即为异面直线 BD 与 AE 所成角(或补角),在$\triangle BDF$ 中,$BF=\sqrt{6}$,$BD=2\sqrt{2}$,$DF=\sqrt{3}$,则 $\cos\angle BDF=\dfrac{8+3-6}{2\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{24}$,故选 C.

8.【答案】B

【解析】依题意,每位同学选择题目的方法数为 $4^4=256$,每位同学所做题目各不相同的方法数为 $A_4^4=4\times3\times2\times1=24$,则所求概率 $P=\frac{24}{256}=\frac{3}{32}$,故选 B.

9.【答案】D

【解析】该几何体是一个圆台截去$\frac{1}{4}$后得到的组合体,该圆台的上、下底面半径分别为1,2,高为3,则该几何体的体积 $V=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\pi\times3\times(1^2+2^2+1\times2)=\frac{21\pi}{4}$,故选 D.

10.【答案】C

【解析】由 $f(x)=0$ 得 $2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=0$,即 $\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $4x-\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$或 $4x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$或 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,由 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,得 $x=\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{12},0,-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$,所以 $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上零点的个数为5,故选 C.

11.【答案】A

【解析】依题意知 $F(2,0)$,直线 l 的斜率存在且不为0,设其方程为 $y=k(x-2)$,代入抛物线 C 的方程,消去 y 并整理得 $k^2x^2-4(k^2+2)x+4k^2=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $\Delta>0$,$x_1x_2=4$. 因为 $A(1,2\sqrt{2})$,所以 $x_2=4$,$x_1+x_2=5$,所以$|AB|=x_1+x_2+4=9$,故选 A.

12.【答案】C

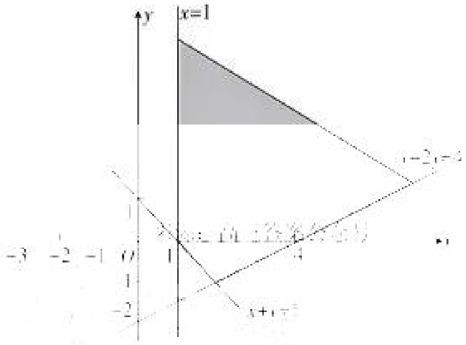
【解析】设点 P 在 AB 上的射影为 C，则 $PC=h$. 由 A,B 两点的俯角分别为 α,β，可得 $\angle PAC=\alpha$，$\angle PBC=\beta$，所以 $\frac{h}{AC}=\tan\alpha$，$\frac{h}{BC}=\tan\beta$，所以 $AB=AC+BC=h\left(\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}\right)$，所以选项 A 中的表达式正确；因为 $AB=h\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)=\frac{h(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$，所以选项 B 中的表达式正确；在 $\triangle PAB$ 中，$\angle APB=\pi-(\alpha+\beta)$，$AP=\frac{h}{\sin\alpha}$，$BP=\frac{h}{\sin\beta}$，由余弦定理得 $AB^2=\frac{h^2}{\sin^2\alpha}+\frac{h^2}{\sin^2\beta}-2\frac{h}{\sin\alpha}\cdot\frac{h}{\sin\beta}\cos[\pi-(\alpha+\beta)]$，所以 $AB=h\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$，所以选项 C 中的表达式错误，而选项 D 中的表达式正确，故选 C.

13.【答案】$(x-2)^2+(y-2)^2=4$（或 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$，或 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$，或 $(x+2)^2+(y+2)^2=4$）

【解析】依题意，圆心为 $(2,2)$，或 $(2,-2)$，$(-2,2)$，$(-2,-2)$，故所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 或 $(x-2)^2+(y+2)^2=4$，$(x+2)^2+(y-2)^2=4$，$(x+2)^2+(y+2)^2=4$.

14.【答案】1

【解析】作出不等式表示的可行域如图中的阴影部分所示，当直线 $z=x+y$ 与 $x+y=1$ 重合时，z 取得最小值 1.

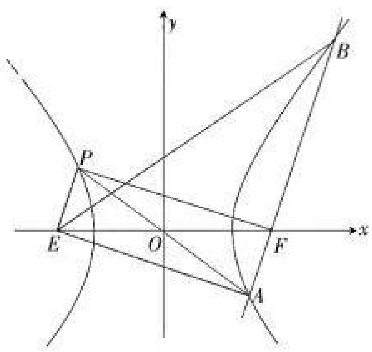


15.【答案】$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

【解析】由题意得，$a\geqslant\frac{\ln(x-1)}{x-1}$（$x>1$）恒成立，设 $h(x)=\frac{\ln(x-1)}{x-1}$（$x>1$），则 $h'(x)=\frac{1-\ln(x-1)}{(x-1)^2}$，令 $h'(x)=0$，得 $x=1+e$，当 $x\in(1,1+e)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(1+e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)\leqslant h(1+e)=\frac{1}{e}$，则 $a\geqslant\frac{1}{e}$.

16.【答案】$\frac{\sqrt{10}}{2}$

【解析】由对称性知点 P 在双曲线 C 的左支上，设 E 为双曲线 C 的左焦点，设 $|PF|=m$，$|AF|=n$，由对称性及 $PF\perp AB$ 知四边形 $AFPE$ 是矩形，则 $|AE|=m$，$|PE|=n$，所以 $|BF|=3|AF|=3n$，$|BE|=2a+3n$，在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，$|AE|^2+|AB|^2=|BE|^2$，即 $m^2+(4n)^2=(2a+3n)^2$，又 $m-n=2a$，所以 $(2a+n)^2+(4n)^2=(2a+3n)^2$，解得 $n=a$，即 $|AF|=a$，所以 $|PF|=m=3a$，在 $\text{Rt}\triangle EPF$ 中，$(3a)^2+a^2=(2c)^2$，解得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.



17. 解：(1)依题意，$a_1+a_4+a_7=3a_4=-24$，$a_2+a_5+a_8=3a_5=-15$，(2 分)

所以 $a_4=-8$，$a_5=-5$，(4 分)

设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则 $d=a_5-a_4=3$，(5 分)

所以 $a_n=a_4+3(n-4)=3n-20$. (6 分)

(2)设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则 $S_n=\dfrac{n(-17+3n-20)}{2}=\dfrac{(3n-37)n}{2}$，(8 分)

令 $a_n=3n-20<0$，得 $n\leqslant 6$，(9 分)来源：高三答案公众号

则 $T_{30}=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_6|+|a_7|+\cdots+|a_{30}|$

$=-S_6+S_{30}-S_6$

$=S_{30}-2S_6$

$=\dfrac{(90-37)\times 30}{2}-2\times\dfrac{(18-37)\times 6}{2}$

$=909$. (12 分)

18. 解：(1)相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{11.1}{\sqrt{10\times 12.58}}=\dfrac{11.1}{\sqrt{125.8}}\approx\dfrac{11.1}{11.22}\approx 0.99$，(4 分)

所以 y 与 t 的线性相关系数 $|r|>0.75$，即 y 与 t 具有较强的线性相关性. (5 分)

(2)由题易知 $\bar{y}=4$，$\bar{t}=3$，

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}=\dfrac{11.1}{10}=1.11$，(7 分)

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=4-1.11\times 3=0.67$，(8 分)

所以线性回归方程为 $\hat{y}=0.67+1.11t$，(9 分)

当 $t=6$ 时，$\hat{y}=0.67+1.11\times 6=7.33$，(11 分)

所以预测 2023 年新能源汽车的保有量约为 7.33 万辆. (12 分)

19. (1)证明：因为 $A_1A\perp$ 平面 ABC，$BM\subset$ 平面 ABC，所以 $A_1A\perp BM$. (1 分)

依题意，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，又 M 为 AC 的中点，所以 $BM\perp AC$，(2 分)

因为 $A_1A\cap AC=A$，A_1A、$AC\subset$ 平面 A_1ACC_1，

所以 $BM\perp$ 平面 A_1ACC_1，而 $AC_1\subset$ 平面 A_1ACC_1，所以 $BM\perp AC_1$. (3 分)

连接 MC_1，易知四边形 A_1C_1MA 为正方形，所以 $AC_1\perp A_1M$，(4 分)

因为 $BM\cap A_1M=M$，

所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BM. (5 分)

(2)解：以 M 为原点，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MC_1}$ 分别为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $M-xyz$，

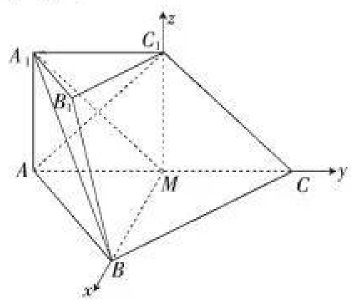
不妨设 $AB=BC=2A_1B_1=2$，

则 $AC=2A_1A=2\sqrt{2}$，(6 分)

得 $A(0,-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，$C_1(0,0,\sqrt{2})$，(7 分)

则 $\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$. (9 分)

设平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，



则$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot \boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{CC_1}\cdot \boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{2}a+\sqrt{2}b=0,\\ -\sqrt{2}b+\sqrt{2}c=0,\end{cases}$

令 $a=1$,可得 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$,(10 分)

由(1)得$\overrightarrow{AC_1}=(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$是平面 A_1BM 的一个法向量,

设平面 A_1BM 与平面 BCC_1B_1 所成锐二面角为 θ,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{AC_1}||\boldsymbol{m}|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times 2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.(12 分)

20.(1)解:依题意得,$\begin{cases}c=1,\\(a+c)(a-c)=5,(2\text{ 分})\\ b^2=a^2-c^2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\sqrt{6},\\ b=\sqrt{5},\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$.(4 分)

(2)证明:依题意,直线 l_1,l_2 的斜率均存在且不为 0,

设直线 l_1 的方程为 $x=my-1(m\neq 0)$,则直线 l_2 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y-1$,(5 分)

直线 l_1,l_2 均过椭圆 C 的左焦点(椭圆 C 内一点),所以 l_1,l_2 与椭圆 C 必有两个交点.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由$\begin{cases}x=my-1,\\5x^2+6y^2=30,\end{cases}$得$(5m^2+6)y^2-10my-25=0$,(6 分)

由韦达定理可得 $y_1+y_2=\frac{10m}{5m^2+6}$,则 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=-\frac{12}{5m^2+6}$,(7 分)

所以点 M 的坐标为$\left(-\frac{6}{5m^2+6},\frac{5m}{5m^2+6}\right)$,同理可得点 $N\left(-\frac{6m^2}{6m^2+5},-\frac{5m}{6m^2+5}\right)$,(8 分)

当 $m\neq\pm 1$ 时,直线 MN 的斜率为 $k_{MN}=\frac{\frac{5m}{5m^2+6}+\frac{5m}{6m^2+5}}{-\frac{6}{5m^2+6}+\frac{6m^2}{6m^2+5}}=\frac{11m}{6(m^2-1)}(m\neq\pm 1)$,

直线 MN 的方程是 $y-\frac{5m}{5m^2+6}=\frac{11m}{6(m^2-1)}\left(x+\frac{6}{5m^2+6}\right)$,(9 分)

令 $y=0$,得 $x=\frac{-30m^2-36}{11(5m^2+6)}=\frac{-6(5m^2+6)}{11(5m^2+6)}=-\frac{6}{11}$,

故直线 MN 与 x 轴交于点$\left(-\frac{6}{11},0\right)$,(10 分) 来源：高三答案公众号

当 $m=\pm 1$ 时,直线 MN 的方程为 $x=-\frac{6}{11}$,直线 MN 与 x 轴交于点$\left(-\frac{6}{11},0\right)$,(11 分)

综上知,直线 MN 与 x 轴交于定点$\left(-\frac{6}{11},0\right)$.(12 分)

21.解:(1)依题意,曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在公共点 P 处的切线相同.

因为 $f'(x)=x+a$,$g'(x)=\frac{a}{x+1}$,(1 分)

设 $P(x_0,y_0)$,则 $f(x_0)=g(x_0)$,且 $f'(x_0)=g'(x_0)$,

即$\begin{cases}\frac{1}{2}x_0^2+ax_0+a-\frac{1}{2}=a\ln(x_0+1),\\ x_0+a=\frac{a}{x_0+1},\end{cases}$(2 分)

由 $x_0+a=\dfrac{a}{x_0+1}$，解得 $x_0=0$ 或 $x_0=-a-1$，

由点 P 的唯一性可得 $-a-1=0$ 或 $-a-1\leqslant -1$，

即 $a=-1$ 或 $a\geqslant 0$.（3 分）

由 $\dfrac{1}{2}x_0^2+ax_0+a-\dfrac{1}{2}=a\ln(x_0+1)$，可得 $a=\dfrac{1}{2}$.

综上可得 $a=\dfrac{1}{2}$.（4 分）来源：高三答案公众号

(2) 令 $h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+ax+a-\dfrac{1}{2}-a\ln(x+1)\ (x>-1)$，

则曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 有两个公共点，即 $h(x)$ 有两个零点.

$h'(x)=x+a-\dfrac{a}{x+1}=\dfrac{x(x+a+1)}{x+1}$.

令 $h'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=-a-1$.（5 分）

(i) 若 $0<a<1$，则 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

$x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

因为 $x\to -1$ 时，$h(x)\to+\infty$，且 $h(1)=2a-a\ln 2>0$，

所以要使 $h(x)$ 有两个零点，只需 $h(0)<0$，即 $a-\dfrac{1}{2}<0$，

又 $0<a<1$，所以 $0<a<\dfrac{1}{2}$.（6 分）

(ii) 若 $a=0$，则 $h(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上只有一个零点 $x=1$，不合题意.（7 分）

(iii) 若 $a<0$，

①当 $a=-1$ 时，$h'(x)\geqslant 0$ 恒成立，$h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，不合题意.（8 分）

②当 $-1<a<0$ 时，$h(x)$ 在 $(-1,-a-1)$ 上单调递增，在 $(-a-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

且 $x\to -1$ 时，$h(x)\to-\infty$，$h(0)=a-\dfrac{1}{2}<0$，

$h(e^2-1)=\dfrac{1}{2}(e^2-1)^2+a(e^2-1)+a-\dfrac{1}{2}-a\ln e^2$

$=\dfrac{1}{2}e^4+(a-1)e^2-2a>\dfrac{1}{2}e^4+(a-1)e^2=e^2\left(\dfrac{1}{2}e^2+a-1\right)>0$，

所以要使 $h(x)$ 有两个零点，只需 $h(-a-1)=0$，

即 $\dfrac{1}{2}(-a-1)^2+a(-a-1)+a-\dfrac{1}{2}-a\ln(-a)=0$，

整理得 $1-\dfrac{a}{2}-\ln(-a)=0$，

令 $m(a)=1-\dfrac{a}{2}-\ln(-a)$，$-1<a<0$，则 $m'(a)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{a+2}{2a}>0$，

所以 $m(a)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，且 $m(-1)=\dfrac{3}{2}>0$，

所以 $m(a)>0$ 在 $(-1,0)$ 上恒成立，所以 $h(x)$ 不可能有两个零点.（10 分）

③当 $a<-1$ 时，$h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,-a-1)$ 上单调递减，在 $(-a-1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h(0)=a-\dfrac{1}{2}<0$，所以 $h(x)$ 不可能有两个零点.（11 分）

综上知，a 的取值范围是 $0<a<\dfrac{1}{2}$.（12 分）

22. 解：(1) 由 $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{2}t, \\ y = -1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 消去 t，得 $\dfrac{y+1}{x-1} = \sqrt{3}$，

得直线 l 的直角坐标方程为 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} - 1$.（2 分）

将互化公式 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ 代入 $\rho^2 - 2\rho\cos\theta - 4\rho\sin\theta + 1 = 0$，

得 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$，即 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.（5 分）

(2) 由 (1) 得圆心 $C(1,2)$，$r = 2$. 点 $P(1,-1)$ 在直线 l 上且在圆外，

所以 $||PA| - |PB||$ 为直线 l 被圆 C 截得的弦长.（7 分）

所以圆心 C 到直线 l 的距离 $d = \dfrac{|\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} - 1|}{2} = \dfrac{3}{2}$.（8 分）

所以 $||PA| - |PB|| = |AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{7}$.（10 分）

23. 解：(1) 由绝对值不等式，

得 $f(x) = |2x-1| + |2x-k| \geqslant |2x-1-(2x-k)| = |k-1|$，（1 分）

当且仅当 $(2x-1)(2x-k) \leqslant 0$ 时等号成立.（2 分）

所以 $|k-1| \geqslant 1$，解得 $k \leqslant 0$，或 $k \geqslant 2$，（4 分）

所以实数 k 的取值范围是 $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$.（5 分）

(2) 由 (1) 知当 $k = 4$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $|k-1| = 3$，（6 分）

从而 $a + 4b = 3$，（7 分）

所以 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)(a + 4b) = \dfrac{1}{3}\left(5 + \dfrac{4b}{a} + \dfrac{a}{b}\right) \geqslant \dfrac{1}{3}\left(5 + 2\sqrt{\dfrac{4b}{a} \cdot \dfrac{a}{b}}\right) = 3$，

当且仅当 $a = 1$，$b = \dfrac{1}{2}$ 时等号成立，（9 分）

所以 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ 的最小值为 3.（10 分）


微信搜一搜
自主选拔在线