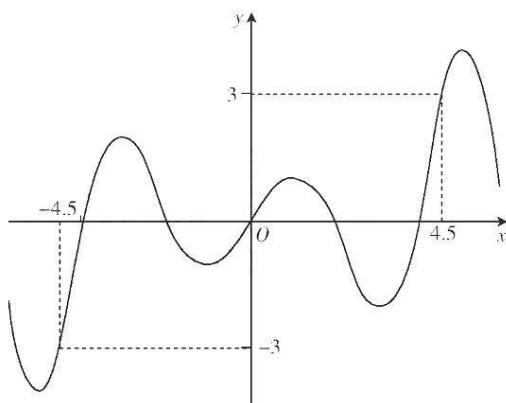


2023 届高三考试 数学试题参考答案(文科)

1. C 由题意可得 $A = \{x | x \leq 1\}$, 则 $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1\}$.
2. B $(3+2i)(1-2i) = 3-6i+2i-4i^2 = 7-4i$.
3. B 由题意可得 $\begin{cases} 2a_1+5d=12, \\ a_1+5d=11, \end{cases}$ 解得 $a_1=1, d=2$, 则 $a_3 = a_1 + 3d = 7$.
4. B 由题意可得 $-\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, 所以 $\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$, 则 $\sin 2\alpha = \frac{9}{16}$.
5. D 记这 2 种玩偶为 a, b , 则小明依次购买的 3 个盲盒中的玩偶情况有 $aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$, 共 8 种, 其中能集齐这 2 种玩偶的情况有 $aab, aba, abb, baa, bab, bba$, 共 6 种, 故所求概率 $P = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
6. D 这组数据共有 20 个, 中位数是按大小顺序排列后的第 10 位数和第 11 位数的平均值, 即为 $\frac{48+49}{2} = 48.5$, 众数是数据中出现次数最多的数, 即 49.
7. C 设该等比数列的公比为 $q (q > 0)$, 则 $q^3 = \frac{b}{a}$, 即 $q = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, 则大吕和夹钟的波长分别为 $a \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3]{a^2 b}$, $a \cdot (\sqrt[3]{\frac{b}{a}})^2 = \sqrt[3]{ab^2}$, 故大吕和夹钟的波长之和为 $\sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{ab^2}$.
8. D 因为 $a = \log_{0.8} 0.81 = 2, b = \log_{0.8} 0.9 < \log_{0.8} 0.8 = 1, 1 < c = 1.4^{1.2} < 1.4^2 = 1.96$, 所以 $b < c < a$.
9. A 由题意可得 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 因为 B, E, F 三点共线, 所以 $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AB} + (1-k)\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(1-k)\overrightarrow{AC}$. 因为 $\overrightarrow{AF} = \lambda\overrightarrow{AD}$, 所以 $k\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(1-k)\overrightarrow{AC} = \lambda(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC})$, 所以 $\begin{cases} k - \frac{2}{3}\lambda = 0, \\ \frac{1}{2}(1-k) = \frac{1}{3}\lambda, \end{cases}$ 解得 $\lambda = \frac{3}{4}$.
10. C 由题意可得 $f(x) = 2\sin(2\omega x - \frac{\pi}{3}) (\omega \in \mathbf{N}_+)$, 则 $\frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega \leq \frac{5}{3}$, 因为 $\omega \in \mathbf{N}_+$, 所以 $\omega = 1$, 所以 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$, 则 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 A 错误; 因为 $f(\frac{2\pi}{3}) = 2\sin(2 \times \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 0 \neq \pm 2$, 所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称, 则 B 错误; 因为 $f(-\frac{5\pi}{6}) = 2\sin[2 \times (-\frac{5\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}] = 2\sin(-2\pi) = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{5\pi}{6}, 0)$ 对称, 则 C 正确; 因为 $\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{11\pi}{12}$, 所以 $\frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 在 $[\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}]$ 上单调递减, 故 D 错误.
11. A 因为 $f(x+2) = -2f(x)$, 所以 $f(x+4) = -2f(x+2)$, 则 $f(x+4) = 4f(x)$. 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) = 2x - x^3$, 则可作出 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示. 由图可知 $|f(x)| \leq 3$ 的解集是 $[-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}]$, 则 $|f(x+1)| \leq 3$ 的解集是 $[-\frac{11}{2}, \frac{7}{2}]$, 则 m 的最大值是 $\frac{7}{2}$.



12. B 设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$. 因为 $f'(x) - f(x) = e^x$, 所以 $g'(x) = 1$, 所以 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} = x + m$, 所以 $f(x) = (x + m)e^x$, 则 $f'(x) = (x + m + 1)e^x$. 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > -m - 1$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $x < -m - 1$, 则 $f(x)_{\min} = f(-m - 1) = -e^{-m-1} = -e$, 解得 $m = -2$, 则 $f(x) = (x - 2)e^x$. $f(x) > 0$, 即 $(x - 2)e^x > 0$, 解得 $x > 2$.

13. $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ 由题意可得 $x^2 - 3x - 4 > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 4$.

14. 8 画出可行域(图略), 当直线 $z = x + y$ 经过点 $(4, 4)$ 时, z 取得最大值 8.

15. $x - y = 0$ 或 $3x - 4y + 1 = 0$ 由题意可得 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$. 设切点为 (x_0, y_0) , 则 $3x_0^2 - 4x_0 + 2 = \frac{y_0 - 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^3 - 2x_0^2 + 2x_0 - 1}{x_0 - 1}$. 整理得 $2x_0^3 - 5x_0^2 + 4x_0 - 1 = 0$, 即 $(x_0 - 1)^2(2x_0 - 1) = 0$, 解得 $x_0 = 1$ 或 $x_0 = \frac{1}{2}$. 当 $x_0 = 1$ 时, $f'(x_0) = f'(1) = 3 - 4 + 2 = 1$, 则所求切线方程为 $y - 1 = x - 1$, 即 $x - y = 0$; 当 $x_0 = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x_0) = f'(\frac{1}{2}) = 3 \times (\frac{1}{2})^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{4}$, 则所求切线方程为 $y - 1 = \frac{3}{4}(x - 1)$, 即 $3x - 4y + 1 = 0$.

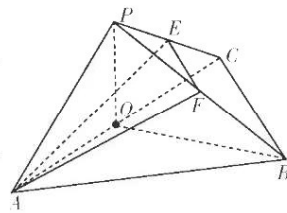
16. $\frac{81}{32}$ 因为 $S_n^2 - (2n - 1)S_n = S_{n-1}^2 + (2n - 1)S_{n-1}$, 所以 $[S_n - S_{n-1} - (2n - 1)](S_n + S_{n-1}) = 0$. 因为 $a_n > 0$, 所以 $S_n - S_{n-1} - (2n - 1) = 0$, 即 $S_n - S_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$, 则 $a_n = 2n - 1 (n \geq 2)$. 因为 $a_1 = 1$ 满足上式, 所以 $a_n = 2n - 1$, 所以 $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = n^2$, 则 $b_n = \frac{S_n^2}{2^{2n-1}} = \frac{n^4}{2^{2n-1}}$, $b_{n+1} = \frac{(n+1)^4}{2^{2n+1}}$, 故 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^4}{4n^4} = (\frac{n+1}{\sqrt{2}n})^4$. 当 $\frac{n+1}{\sqrt{2}n} > 1 (n \in \mathbf{N}_+)$, 即 $1 \leq n < 3$ 时, $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1$, 即 $b_{n+1} > b_n$, 则 $b_1 < b_2$; 当 $\frac{n+1}{\sqrt{2}n} < 1 (n \in \mathbf{N}_+)$, 即 $n \geq 3$ 时, $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$, 即 $b_{n+1} < b_n$, 则 $b_3 > b_4 > \dots > b_n$. 因为 $b_2 = \frac{2^4}{2^3} = 2$, $b_3 = \frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{32}$, 所以 b_n 的最大值为 $b_3 = \frac{81}{32}$.

17. 解: (1) 由题中数据可得 $K^2 = \frac{100 \times (10 \times 30 - 20 \times 40)^2}{70 \times 30 \times 50 \times 50} = \frac{100}{21} \approx 4.762$ 3 分
因为 $4.762 > 3.841$, 所以有 95% 的把握认为是否是因为喜欢宠物而养宠物与性别有关. 5 分
(2) 由题意可得抽取的 6 人中, 因为喜欢宠物而养宠物的有 2 人, 记为 a, b , 其他原因养宠物的有 4 人, 记为 c, d, e, f 7 分
从这 6 人中随机抽取 2 人的情况有 $ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, cd, ce, cf, de, df, ef$, 共 15 种, 9 分
其中符合条件的情况有 $ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf$, 共 9 种, 10 分
故所求概率 $P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ 12 分

【♠ 高三数字 · 参考答案 第 2 页 (共 5 页) 文科 ♠】

18. 解: (1) 因为 $2\sqrt{2}a = c(\sin B + 2\sqrt{2}\cos B)$, 所以 $2\sqrt{2}\sin A = \sin C\sin B + 2\sqrt{2}\sin C\cos B$ 1 分
 因为 $A + B + C = \pi$, 所以 $\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$ 2 分
 所以 $2\sqrt{2}\sin A - 2\sqrt{2}\sin B\cos C + 2\sqrt{2}\sin C\cos B$, 所以 $2\sqrt{2}\sin B\cos C = \sin C\sin B$ 4 分
 因为 $0 < B < \pi$, 所以 $\sin B > 0$, 则 $\tan C = 2\sqrt{2}$ 5 分
 (2) 由 (1) 可知 $\tan C = 2\sqrt{2}$, 则 $\sin C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos C = \frac{1}{3}$ 7 分
 由三角形的面积公式可得 $\frac{1}{2}ab\sin C = 10\sqrt{2}$, 则 $\frac{1}{2}a \times 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 10\sqrt{2}$, 解得 $a = 5$ 9 分
 由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 25 + 36 - 2 \times 5 \times 6 \times \frac{1}{3} = 41$, 则 $c = \sqrt{41}$ 12 分

19. (1) 证明: 因为 $AD = DC = BC = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $AB = 4$, 所以 $AC = 2\sqrt{3}$.
 则 $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 故 $BC \perp AC$ 1 分
 取 AC 的中点 O , 连接 OP, OB , 则 $OP = 1, OB = \sqrt{7}$.
 因为 $OP^2 + OB^2 = PB^2$, 所以 $OP \perp OB$ 2 分
 因为 $PA = PC$, 且 O 为 AC 的中点, 所以 $OP \perp AC$.



- 因为 $AC, OB \subset$ 平面 ABC , 且 $AC \cap OB = O$, 所以 $OP \perp$ 平面 ABC 3 分
 因为 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $OP \perp BC$ 4 分
 因为 $OP, AC \subset$ 平面 PAC , 且 $OP \cap AC = O$, 所以 $BC \perp$ 平面 PAC 5 分

- (2) 解: 由题意可知 $PA = PC = BC = 2$, $\angle APC = 120^\circ$, 则 $\triangle PAC$ 的面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ 6 分
 由 (1) 可知, $BC \perp$ 平面 PAC , 所以三棱锥 $B-PAC$ 的体积 $V_1 = \frac{1}{3} S_1 \cdot BC = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 7 分
 因为 E, F 分别是棱 PC, PB 的中点, 所以 $EF \parallel BC, EF = \frac{1}{2} BC = 1$, 则 $EF \perp$ 平面 PAC 8 分
 因为 E 是棱 PC 的中点, 所以 $\triangle PAE$ 的面积 $S_2 = \frac{1}{2} S_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 9 分
 则三棱锥 $F-PAE$ 的体积 $V_2 = \frac{1}{3} S_2 \cdot EF = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 10 分
 故四棱锥 $A-BCEF$ 的体积 $V = V_1 - V_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 12 分

20. 解: (1) 设椭圆的焦距为 $2c$,

$$\begin{cases} \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{a^2} = 1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \text{由题意可得} \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2, \\ \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = 1, \\ c^2 = 1. \end{cases} \dots\dots 3 \text{分}$$

故椭圆 C 的方程为 $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ 4 分

(2) 当直线 l 的斜率为 0 时, 以 AB 为直径的圆方程为 $x^2 + y^2 = 1$.

当直线 l 的斜率不存在时, 以 AB 为直径的圆方程为 $(x - \frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9}$.

【♠ 高三数学 · 参考答案 第 3 页 (共 5 页) 文科 ♠】



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x - \frac{1}{3})^2 - y^2 = \frac{16}{9}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \end{cases} \text{故若存在定点 } M, \text{ 则此定点为 } M(-1, 0). \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当直线 l 斜率存在, 且不为 0 时, 设直线 $l: x = my + \frac{1}{3}, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x = my + \frac{1}{3}, \end{cases} \text{整理得 } (18m^2 + 9)y^2 + 12my - 16 = 0,$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{12m}{18m^2 + 9}, y_1 y_2 = -\frac{16}{18m^2 + 9}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (x_1 + 1, y_1) \cdot (x_2 + 1, y_2) = (my_1 + \frac{4}{3})(my_2 + \frac{4}{3}) + y_1 y_2 = (m^2 + 1)y_1 y_2 + \frac{4}{3}m(y_1 + y_2) \\ &+ \frac{16}{9} = \frac{16}{9} - \frac{16(m^2 + 1)}{18m^2 + 9} + \frac{4}{3}m \cdot \frac{-12m}{18m^2 + 9} + \frac{16}{9} - \frac{16m^2 - 16}{18m^2 + 9} + \frac{-16m^2}{18m^2 + 9} + \frac{16(2m^2 + 1)}{9(2m^2 + 1)} = 0. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以以 AB 为直径的圆经过定点 $M(-1, 0)$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上, 以 AB 为直径的圆经过定点 $M(-1, 0)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. (1) 解: 由题意可得 $f'(x) = e^x - 2ax$, 则 $f'(x) = e^x - 2ax \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

$$\text{故 } 2a \leq \frac{e^x}{x} (x > 0). \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{e^x}{x} (x > 0), \text{ 则 } g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} (x > 0). \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

由 $0 < x < 1$, 得 $g'(x) < 0$, 由 $x > 1$, 得 $g'(x) > 0$,

则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) \geq g(1) = e$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

从而 $2a \leq e$, 即 $a \leq \frac{e}{2}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 证明: 设 $h(x) = f(x) - (e-2)x - a = e^x - ax^2 - (e-2)x - a$,

因为 $a \leq 1$, 所以 $h(x) = e^x - a(x^2 + 1) - (e-2)x \geq e^x - (x^2 + 1) - (e-2)x$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设 $F(x) = e^x - (x^2 + 1) - (e-2)x$, 则 $F'(x) = e^x - 2x - e + 2$.

设 $G(x) = F'(x) = e^x - 2x - e + 2 (x \geq 0)$, $G'(x) = e^x - 2$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

由 $G'(x) > 0$, 得 $x > \ln 2$, 由 $G'(x) < 0$, 得 $0 \leq x < \ln 2$.

则 $G(x)$ 在 $[0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增, 即 $F'(x)$ 在 $[0, \ln 2)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

因为 $F'(0) = 3 - e > 0$, $F'(\ln 2) = 4 - e - 2\ln 2 < 0$, $F'(1) = 0$,

所以存在 $x_0 \in (0, \ln 2)$, 使 $F'(x_0) = 0$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

则 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $F(0) = F(1) = 0$, 所以 $h(x) \geq 0$ 对一切的 $x \geq 0$ 恒成立, 即当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq (e-2)x + a$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解: (1) 直线 l 的极坐标方程是 $\theta = \frac{\pi}{4}$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{由 } \begin{cases} x = 2 + 3\cos \varphi, \\ y = 3\sin \varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数}), \text{ 得 } x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0.$$

则曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta - 5 = 0$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 设 $A(\rho_A, \frac{\pi}{4}), B(\rho_B, \frac{\pi}{4})$.

联立 $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4}, \\ \rho^2 - 4\rho \cos \theta - 5 = 0. \end{cases}$ 整理得 $\rho^2 - 2\sqrt{2}\rho - 5 = 0$ 6 分

则 $\rho_A + \rho_B = 2\sqrt{2}, \rho_A \cdot \rho_B = -5$ 7 分

从而 $|AB| = |\rho_A - \rho_B| = \sqrt{(\rho_A + \rho_B)^2 - 4\rho_A \cdot \rho_B} = 2\sqrt{7}$ 8 分

故 $\triangle PAB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \cdot \rho_P \cdot |AB| \cdot \sin(\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{21}$ 10 分

23. 解: (1) 因为 $f(x) = |2x+2| + |x-1| = \begin{cases} -3x-1, & x \leq -1, \\ x+3, & -1 < x < 1, \\ 3x-1, & x \geq 1, \end{cases}$ 2 分

所以 $f(x) \leq 8$ 等价于 $\begin{cases} x \leq -1, \\ 3x-1 \leq 8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 < x < 1, \\ x+3 \leq 8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 1, \\ 3x+1 \leq 8, \end{cases}$ 3 分

解得 $-3 \leq x \leq \frac{7}{3}$, 即不等式 $f(x) \leq 8$ 的解集为 $[-3, \frac{7}{3}]$ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $f(x)_{\min} = f(-1) = -3 \times (-1) - 1 = 2$, 则 $a+b=m=2$ 6 分

故 $\frac{2}{a} + \frac{8}{b} = \frac{1}{2}(a+b)(\frac{2}{a} + \frac{8}{b}) = \frac{1}{2}(\frac{2b}{a} + \frac{8a}{b} + 10)$ 8 分

因为 $\frac{2b}{a} + \frac{8a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{8a}{b}} = 8$, 当且仅当 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}$ 时, 等号成立. 9 分

所以 $\frac{2}{a} + \frac{8}{b} = \frac{1}{2}(\frac{2b}{a} + \frac{8a}{b} + 10) \geq 9$, 即 $\frac{2}{a} + \frac{8}{b}$ 的最小值是 9. 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线