数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\,|\,0<x\le 1\}$，$B=\{x\,|\,2^x\le 1\}$，设全集 $U=\mathbf{R}$，则 $\complement_U(A\cup B)=(\quad)$

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,1]$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$[1,+\infty)$

【答案】C

【解析】由 $2^x\le 1=2^0$，得到 $x\le 0$，所以 $B=\{x\,|\,x\le 0\}$，又因 $A=\{x\,|\,0<x\le 1\}$，所以 $A\cup B=\{x\,|\,x\le 1\}$，因为全集 $U=\mathbf{R}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=(1,+\infty)$　故选：C.

2．已知复数 z 满足 $\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$，则 $|z|=(\quad)$

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

【答案】A

【解析】由 $\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z}=\mathrm{i}$，得 $z-2\mathrm{i}=z\mathrm{i}\Rightarrow z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2\mathrm{i}-2}{2}=\mathrm{i}-1$，

$|z|=\sqrt{2}$．故选：A.

3．已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=(\quad)$

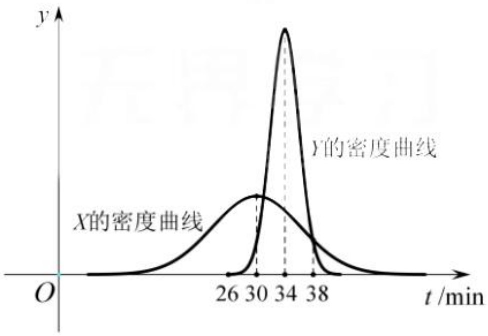
A．2　　B．$\sqrt{3}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．1

【答案】D

4．李明上学有时坐公交车，有时骑自行车.他各记录了 50 次坐公交车和骑自行车所花的时间，通过统计相关数据后，发现坐公交车用时 X 和骑自行车用时 Y 都近似服从正态分布. 绘制了概率分布密度曲线，如图所示，则下列哪种情况下，应选择骑自行车(　　)

A. 有 26 min 可用　　B. 有 30 min 可用

C. 有 34 min 可用　　D. 有 38 min 可用



【答案】D

【解析】根据 X 和 Y 的分布密度曲线图可知，$P(X\le 38)<P(Y\le 38)$.所以，如果有 38 min 可用，那么骑自行车不迟到的概率大，应选择骑自行车.

【命题来源】改编自《选择性必修第三册》P86-例.

5．已知角 θ 的终边在直线 $y=2x$ 上，则 $\dfrac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=(\quad)$

A．-3　　B．3　　C．$-\dfrac{1}{3}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

【答案】A

【解析】因为角 θ 的终边在直线 $y=2x$ 上，故 $\tan\theta=2$，

所以 $\dfrac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\dfrac{\tan^2\theta+1+2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=-3$，故选：A.

6．已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，准线为l，A为C上一点，$AB\perp l$，垂足为B，BF与y轴交点为M，若$|FA|=|FB|$，且ΔABM的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，则C的方程为(　　)

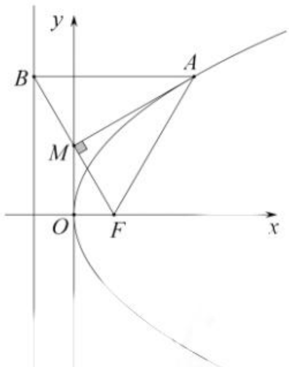
A．$y^2=2x$　　B．$y^2=4x$　　C．$y^2=8x$　　D．$y^2=16x$

【答案】B

【解析】由抛物线定义知$|AF|=|AB|$，所以ΔABF为等边三角形，M为BF的中点，所以$AM\perp MF$，

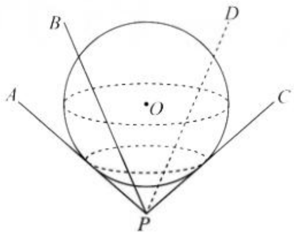
$\angle AFB=\angle ABF=\angle BFO=60^\circ$，$|OF|=\frac{p}{2}\Rightarrow|MF|=p,|AM|=\sqrt{3}p,$

ΔABM的面积$S_{\Delta ABM}=S_{\Delta AMF}=\frac{1}{2}|MF|\cdot|AM|=\frac{\sqrt{3}p^2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow p=1$，所以$C$的方程为$y^2=4x$，故答案为：B.



7．如图，一个由四根细铁杆PA、PB、PC、PD组成的支架（PA、PB、PC、PD按照逆时针排布），若$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPA=\frac{\pi}{3}$，一个半径为1的球恰好放在支架上与四根细铁杆均有接触，则球心O到点P的距离是(　　)

A．2　　B．$\frac{3}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$



【答案】C

【解析】如上图正四棱锥$P-ABCD$，H为底面中心，O为球心，

E为球体与PD的切点，

又$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPA=\frac{\pi}{3}$，

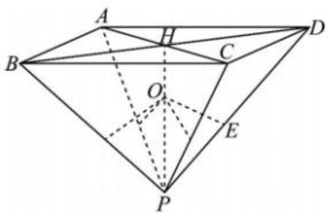
故$P-ABCD$各侧面均为等边三角形，

若侧面三角形边长为a，

则$HD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$PD=a$，$OE=1$，

显然$\mathrm{Rt}\triangle PHD\sim\mathrm{Rt}\triangle PEO$，

故$\frac{HD}{PD}=\frac{OE}{OP}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$OP=\sqrt{2}$．故选 A.



8．已知实数 p,q,r 满足：$\begin{cases}\log_5(2^p+3^p)=\log_2(5^p-3^p),\\ \log_7(3^q+5^q)=\log_3(7^q-5^q),\\ \log_9(5^r+7^r)=\log_5(9^r-7^r).\end{cases}$ 则(　　)

A．$p<q<r$　　B．$r<p<q$　　C．$p<r<q$　　D．$r<q<p$

【答案】 A

【解析】 $\begin{cases}5^p-3^p>0\\ 7^q-5^q>0\\ 9^r-7^r>0\end{cases}\Rightarrow p,q,r>0$，

设 $\log_5(2^p+3^p)=\log_2(5^p-3^p)=m\Rightarrow\begin{cases}2^p+3^p=5^m\\ 5^p-3^p=2^m\end{cases}\Rightarrow 5^m-2^p=5^p-2^m\Rightarrow 5^m+2^m=5^p+2^p$

设 $f_1(x)=5^x+2^x$ 是单调递增函数，所以 $m=p$，所以 $2^p+3^p=5^p$，即 $\left(\frac{2}{5}\right)^p+\left(\frac{3}{5}\right)^p=1$

又 $g_1(x)=\left(\frac{2}{5}\right)^x+\left(\frac{3}{5}\right)^x$ 是单调递减函数，且 $g_1(1)=1$，所以 $p=1$，

设 $\log_7(3^q+5^q)=\log_3(7^q-5^q)=n\Rightarrow\begin{cases}3^q+5^q=7^n\\ 7^q-5^q=3^n\end{cases}\Rightarrow 7^n-3^q=7^q-3^n\Rightarrow 7^n+3^n=7^q+3^q$

设 $f_2(x)=7^x+3^x$ 是单调递增函数，所以 $n=q$，所以 $3^q+5^q=7^q$，即 $\left(\frac{3}{7}\right)^q+\left(\frac{5}{7}\right)^q=1$

又 $g_2(x)=\left(\frac{3}{7}\right)^x+\left(\frac{5}{7}\right)^x$ 是单调递减函数，且 $g_2(1)=\frac{8}{7}>1,g_2(2)=\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{34}{49}<1$，

所以 $1<q<2$，

同理，由 $\log_9(5^r+7^r)=\log_5(9^r-7^r)$ 得 $\left(\frac{5}{9}\right)^r+\left(\frac{7}{9}\right)^r=1$，

又 $g_3(x)=\left(\frac{5}{9}\right)^x+\left(\frac{7}{9}\right)^x$ 是单调递减函数，且 $g_3(1)=\frac{4}{3}>1,g_3(2)=\left(\frac{5}{9}\right)^2+\left(\frac{7}{9}\right)^2=\frac{74}{81}<1$，

所以 $1<r<2$，

由 $\left(\frac{3}{7}\right)^x<\left(\frac{5}{9}\right)^x,\left(\frac{5}{7}\right)^x<\left(\frac{7}{9}\right)^x\Rightarrow g_2(x)<g_3(x)$，

所以，$\begin{cases}g_2(q)<g_3(q)\\ g_2(q)=g_3(r)=1\end{cases}\Rightarrow g_3(r)<g_3(q)$ 且 $g_3(x)$ 是单调递减函数，所以 $q<r$．

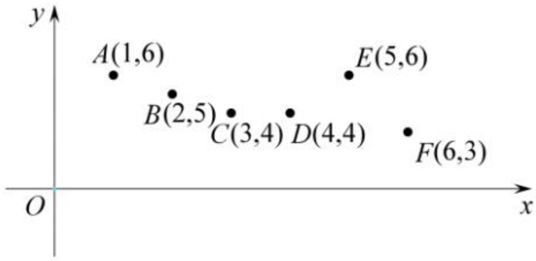
综上：$p<q<r$.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．6 个数据(x,y)构成的散点图，如图所示，采用一元线性回归模型建立经验回归方程，若在 6 个数据中去掉$E(5,6)$后，下列说法正确的是(　　)

A．解释变量 x 与预报变量 y 的相关性变强　　B．样本相关系数 r 变大

C．残差平方和变小　　D．决定系数 R^2 变小



【答案】 AC

【解析】 去掉$E(5,6)$后，变量 x 与预报变量 y 的相关性变强，故 A 正确；但由于散点的分布是从左上到右下，故变量 x，y 负相关，所以相关系数 r 变小，

残差平方和变小， 决定系数 R^2 变大，C 正确，D 错误，故选：AC.

10．若$a,b>0$，且$a+b=1$，则(　　)

A．$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2}$　　B．$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\ge 9$

C．$a^2+4b^2\ge\dfrac{5}{4}$　　D．$\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}\ge 1$

【答案】 ABD

【解析】 由基本不等式：

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=a+b+2\sqrt{ab}=1+2\sqrt{ab}\le 1+a+b=2\Rightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2}$，A 正确；

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}\right)(a+b)=1+4+\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}\ge 5+2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}=9$．B 正确；

$a^2+4b^2=(1-b)^2+4b^2=5b^2-2b+1=5\left(b-\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{4}{5}\ge\dfrac{4}{5}$，C 不正确；

$\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}+1=\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}+a+b\ge 2\sqrt{a\cdot\dfrac{b^2}{a}}+2\sqrt{b\cdot\dfrac{a^2}{b}}=4$，D 正确.

11．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$(a+b):(b+c):(c+a)=5:6:7$，则下列结论正确的是(　　)

A．$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$

B．$\triangle ABC$为钝角三角形

C．若$a=6$，则$\triangle ABC$的面积是$6\sqrt{15}$

D．若$\triangle ABC$外接圆半径是 R，内切圆半径为 r，则$\dfrac{R}{r}=\dfrac{16}{5}$

【答案】 BD

【解析】 设$a+b=5t,b+c=6t,c+a=7t$，则$a=3t,b=2t,c=4t$，

对于 A，$\sin A:\sin B:\sin C=3:2:4$，故 A 不正确；

对于 B，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{4}<0$，故 B 正确；

对于 C，若$a=6$，则$t=2$，$b=4,c=8$，$b=10$，所以$\cos C=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

所以△ABC的面积是$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\frac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$，故 C 不正确；

对于 D，若正弦定理$R=\frac{c}{2\sin C}=\frac{8t}{\sqrt{15}}=\frac{8\sqrt{15}}{15}t$，

△ABC的周长$l=9t$，$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{15}}{4}t^2$，所以内切圆半径为$r=\frac{2S}{l}=\frac{\sqrt{15}}{6}t$，

所以$\frac{R}{r}=\frac{16}{5}$.故 D 正确．故选：BD

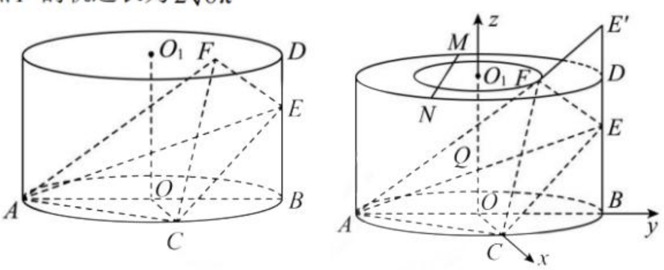
12．如图，圆柱OO_1的底面半径和母线长均为3，AB是底面直径，点C在圆O上且$OC\perp AB$，点E在母线BD上，$BE=2$，点F是上底面的一个动点，则(　　)

A．$AF+FE$的最小值为$2\sqrt{13}$

B．若$AE\perp CF$，则点F的轨迹长为4

C．若$AF\perp FE$，则四面体$ACEF$的外接球的表面积为40π

D．若$AF\perp FE$，则点F的轨迹长为$2\sqrt{6}\pi$



【答案】ACD

【解析】设 E 关于 D 点的对称点为E'，

则$AF+EF=AF+FE'\geq AE'=\sqrt{AB^2+BE'^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$，

所以$AF+FE\geq 2\sqrt{13}$，当且仅当A,F,E'三点共线时取等号，

故$AF+FE$的最小值为$2\sqrt{13}$，故 A 正确；

由题意知$OC\perp AB, OO_1\perp OC, OO_1\perp AB$，以 O 为坐标原点，以$OC$，$OB$，$OO_1$为$x,y,z$正方向建立空间直角坐标系，　则$A(0,-3,0),C(3,0,0),E(0,3,2)$，设$F(x,y,3)$，

则$\overrightarrow{AE}=(0,6,2),\overrightarrow{CF}=(x-3,y,3),\overrightarrow{AF}=(x,y+3,3),\overrightarrow{FE}=(x,y-3,1)$，

对选项 B：　当$AE\perp CF$时，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}=6y+6=0,\therefore y=-1$，

所以点F的轨迹长为上底面圆O_1的一条弦 MN，O_1到 MN 的距离为 1，

所以$MN=2\sqrt{3^2-1}=4\sqrt{2}$，故点$F$的轨迹长为$4\sqrt{2}$，所以 B 错误；

对选项 D：　当$AF\perp FE$时，$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FE}=(x,y+3,3)\cdot(x,y-3,1)=0,\therefore x^2+y^2=6$，

所以点F的轨迹是以O_1为圆心，$\sqrt{6}$为半径的圆，其轨迹长为$2\sqrt{6}\pi$，故 D 正确；

对选项 C：在△ACE中，　$AC=3\sqrt{2},CE=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22},AE=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}$，

$\therefore AC^2+CE^2=AE^2,\therefore$△$ACE$为直角三角形，其外心为$AE$与$OO_1$的交点$Q$，且$OQ=1$，$QE=\sqrt{10}$，而$QF=\sqrt{QO_1^2+O_1F^2}=\sqrt{2^2+6}=\sqrt{10}$

所以$QF=QE=QC=QA$，所以 Q 为四面体$ACEF$的外接球的球心，球半径为$\sqrt{10}$，所以球的表面积为40π，故 C 正确．故选：ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中二项式系数最大的项是________.

【答案】$-\dfrac{5}{2}$

【解析】$\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式有 7 项，其每项的二项式系数为 C_6^3.

由二项式定理得二项式系数最大的一项是 $T_4=C_6^3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^3\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3=-\dfrac{5}{2}$.

14. 中国古代数学著作《增减算法统宗》中有这样一段记载："三百七十八里关，初行健步不为难，次日脚痛减一半，如此六日过其关." 则此人在第六天行走的路程是__________里（用数字作答）.

【答案】6

【解析】将这个人行走的路程依次排成一列得等比数列 $\{a_n\}$，$n\in N^*, n\le 6$，其公比 $q=\dfrac{1}{2}$，令数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_6=378$，而 $S_6=\dfrac{a_1(1-\frac{1}{2^6})}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{63a_1}{32}$，因此 $\dfrac{63a_1}{32}=378$，解得 $a_1=192$，所以此人在第六天行走的路程 $a_6=a_1\times\dfrac{1}{2^5}=6$（里）.故答案为：6

15.直线 $l: x+2y-4=0$ 与椭圆 $\dfrac{x^2}{m+1}+\dfrac{y^2}{m}=1\ (m>0)$ 有且仅有一个公共点 P，则 $m=$________，点 P 的坐标是________.

【答案】3，$P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

【解析】法 1：联立方程 $\begin{cases}x=-2y+4\\ mx^2+(m+1)y^2=m(m+1)\end{cases}$ 得 $(5m+1)y^2-16my-m^2+15m=0$，

$\Delta=16^2m^2-4(15m-m^2)(5m+1)=20m(m+1)(m-3)=0$ 得 $m=3$，所以 $4y^2-12y+9=0$，得 $y=\dfrac{3}{2}$，所以 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

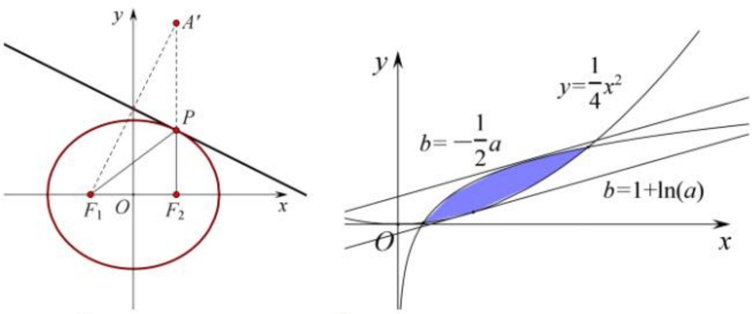
法 2：设 $P(x_0,y_0)$，则 $P(x_0,y_0)$ 处切线 $\dfrac{x_0x}{m+1}+\dfrac{y_0y}{m}=1$，与 $l: x+2y-4=0$ 可化为 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$，比对得

$\begin{cases}\dfrac{x_0}{m+1}=\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{y_0}{m}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{m+1}{4},\\ y_0=\dfrac{m}{2}\end{cases}$，代入椭圆方程得：$\dfrac{m+1}{16}+\dfrac{m}{4}=1\Rightarrow m=3$，得 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

$\Delta=16^2m^2-4(15m-m^2)(5m+1)=20m(m+1)(m-3)=0$ 得 $m=3$，所以 $4y^2-12y+9=0$，得 $y=\dfrac{3}{2}$，所以 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

法 3：椭圆长轴长 $2a=2\sqrt{m+1}$，焦点 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$.由椭圆的定义知，椭圆上每一个点 P，均满足 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，椭圆上外部的每一个点 P，均满足 $|PF_1|+|PF_2|>2a$，直线 l 与椭圆有且仅有一个公共点 P，则对于直线 l 上任意一点 Q，满足 $|QF_1|+|QF_2|\ge 2a$，当且仅当 Q 在点 P 处时，等号成立，即当 Q 在 P 处时，$|QF_1|+|QF_2|$ 取得最小值 $2a$.求得 $F_1(-1,0)$ 关于直线 $l: x+2y-4=0$ 对称的点为 $A(1,4)$，

所以 $2a=|PF_1|+|PF_2|=|PA|+|PF_2|=|AF_2|=4$，因此 $m=3$，椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$P$ 的坐标是 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.



16. 若 $\forall x\in(0,+\infty),\frac{\ln x}{x}\le a-\frac{b}{x}\le x(a,b\in\mathbf{R})$，则 $b-\frac{1}{2}a$ 的取值范围是__________.

【答案】 $\left[-\frac{1}{4},\ln 2\right]$

【解析】 $\because x>0$，原不等式变形得 $\ln x\le ax-b\le x^2$.

$\forall x\in(0,+\infty),x^2-ax+b\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}a\le 0\\ b\ge 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=a^2-4b\le 0\end{cases}$

$\forall x\in(0,+\infty),f(x)=\ln x-ax+b\le 0$，

由于 $f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$，

若 $a\le 0$，则 $f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)$ 无最大值，不符合题意；

若 $a>0$，则 $f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{a}$，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1+b\le 0$.

综上：$\frac{1}{4}a^2\le b\le 1+\ln a$，

$g(x)=\frac{x^2}{4}-1-\ln x\Rightarrow g'(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-2}{2x}=0\Rightarrow x=\sqrt{2}$

$g(x)$ 在 $(0,\sqrt{2})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{2},+\infty)$ 上单调递增，$g(x)_{\min}>g(\sqrt{2})=\frac{1}{2}(\ln 2-1)<0$

且 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{4e^2}>0,g(1)=-\frac{3}{4}<0,g(2)=-\ln 2<0,g(e^2)=\frac{e^4}{4}-3>0$，

所以 $g(x)$ 有两个零点 $\frac{1}{e}<\alpha<1<2<\beta<e^2$，

由 $\frac{a^2}{4}\le b\le 1+\ln a$ 得 $\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}a\le b-\frac{1}{2}a\le 1+\ln a-\frac{1}{2}a$

$p(a)=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}a,(\alpha<a<\beta),p(a)=\frac{1}{4}(a-1)^2-\frac{1}{4}\ge -\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=1$ 时等号成立.

$q(a)=1+\ln a-\frac{1}{2}a\Rightarrow q'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow a=2$，

且当 $a\in(\alpha,2)$，$q'(a)>0$，$q(a)$ 单调递增，且当 $a\in(2,\beta)$，$q'(a)<0$，$q(a)$ 单调递减；

所以 $q(a)\le q(2)=\ln 2$，当且仅当 $a=2$ 时等号成立.

所以 $b-\frac{1}{2}a$ 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{4},\ln 2\right]$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分 10 分）

已知等差数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，$a_1=1$，$S_9=9a_6-18$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$，

求和：$T_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1$.

【解析】(1) $S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5$，

又$S_9=9a_6-18$，所以$9a_5=9a_6-18\Rightarrow d=a_6-a_5=\dfrac{18}{9}=2$，

所以$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列，

所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$.--4 分

(2) $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$得

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}=(2n-5)\cdot 2^n+6(n\ge 2)$

两式相减得：$a_nb_n=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6-(2n-5)\cdot 2^n-6=(2n-1)\cdot 2^n(n\ge 2)$

又$a_1b_1=2$，所以$a_nb_n=(2n-1)\cdot 2^n(n\in \mathrm{N}^*)$

又$a_n=2n-1$，所以$b_n=2^n$.---7 分

$T_n=1\times 2^n+3\times 2^{n-1}+5\times 2^{n-2}+\cdots+(2n-3)\times 4+(2n-1)\times 2$ ①

$2T_n=1\times 2^{n+1}+3\times 2^n+5\times 2^{n-1}+\cdots+(2n-3)\times 8+(2n-1)\times 4$ ②

两式相减得：$T_n=2^{n+1}+2^{n+1}+2^n+\cdots+8-(2n-1)\times 2$

$=2^{n+1}+\dfrac{8-2^{n+2}}{1-2}-(2n-1)\times 2=3\times 2^{n+1}-4n-6$.---10 分

【考查内容】等差数列性质与公式，和式递推数列求通项，错位相减法求和.

18.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$在区间$(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3})$单调，其中$\omega$为正整数，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，且$f(\dfrac{\pi}{4})=-f(\dfrac{7\pi}{12})$.

(1)求$y=f(x)$图象的一个对称中心；

(2)若$f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}$，求$\varphi$.

解：(1)由题设，$f(x)$的最小正周期$T\geqslant 2\times(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6})=\pi$.

又因为$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$，$f\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{12}}{2}\right)=f\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=0$，

所以为$y=f(x)$图象的一个对称中心是$\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$. --4 分

(2)由(1)知$T\geqslant\pi$，故$\omega=\dfrac{2\pi}{T}\leqslant 2$，由$\omega\in\mathrm{N}^*$，得$\omega=1,2$. -----------------------------------5 分

由$\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$为$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$的一个对称中心，所以$\dfrac{5\pi}{12}\omega+\varphi=k_1\pi,k_1\in\mathbf{Z}$. -------------6 分

因为$f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k_2\pi$或$\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi=\dfrac{5\pi}{6}+2k_3\pi,k_2,k_3\in\mathbf{Z}$. -----------------7 分

若$\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{6}+2k_2\pi$，则$\dfrac{1}{12}\omega=-\dfrac{\pi}{6}+(k_1-2k_2)\pi$，即$\omega=-2+12(k_1-2k_3)$.

不存在整数 k_1,k_2，使得 $\omega=1,2$．--9 分

若 $\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k_3\pi$，则 $\frac{\pi}{12}\omega=-\frac{5\pi}{6}+(k_1-2k_3)\pi$，即 $\omega=-10+12(k_1-2k_3)$．

不存在整数 k_1,k_3，使得 $\omega=1$．当 $k_1=2k_3+1$ 时，$\omega=2$．------------------------------------ 11 分

此时 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k_3\pi$，由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$．-- 12 分

【命题来源】改编自 2023 年四省联考 T18

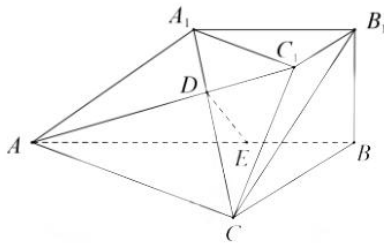
【考查内容】$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的对称性、周期性、单调性.

19.（本小题满分 12 分）

如图，三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$，$AB\perp BC$，$AC\perp BB_1$，平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 ABC，$AB=6,BC=4$，$BB_1=2$，AC_1 与 A_1C 相交于点 D，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，且 DE // 平面 BCC_1B_1．

(1)求三棱锥 $C-A_1B_1C_1$ 的体积；

(2)平面 A_1B_1C 与平面 ABC 所成角为 α，CC_1 与平面 A_1B_1C 所成角为 β，求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.



【解析】(1)因为平面 $ABB_1A_1\perp$ 平面 ABC，且平面 $ABB_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AB$，

又 $AB\perp BC$，所以 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 $BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp BB_1$，

又 $AC\perp BB_1$，$BC\cap AC=C$，所以 $BB_1\perp$ 平面 ABC，--------------------------------------- 2 分

连接 C_1B，因为 DE // 平面 BCC_1B_1，$DE\subset$ 平面 ABC_1，平面 $ABC_1\cap$ 平面 $BCC_1B_1=C_1B$，

所以，DE // C_1B，

又 $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，所以 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC_1}$，从而 $A_1C_1=\frac{1}{2}AC$.--- 4 分

所以三棱锥 $C-A_1B_1C_1$ 底面 $A_1B_1C_1$ 的面积 $S_1=\frac{1}{2}\times2\times3=3$，高 $h=BB_1=2$，

因此其体积为：$V=\frac{1}{3}S_1h=\frac{1}{3}\times3\times2=2$.-- 6 分

(2)证明：法 1：因为平面 ABC // 平面 $A_1B_1C_1$，平面 A_1B_1C 与平面 ABC 所成角即平面 A_1B_1C 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成角，亦即 $C-B_1A_1-C_1$ 的平面角，

因为 $AB\perp BC,AB\perp BB_1$，所以 $AB\perp$ 平面 CBB_1C_1，又 A_1B_1 // AB，所以 $A_1B_1\perp$ 平面 CBB_1C_1，

所以 $\angle CB_1C_1$ 即 $C-B_1A_1-C_1$ 的平面角，所以 $\angle CB_1C_1=\alpha$，-----------------------------------8 分

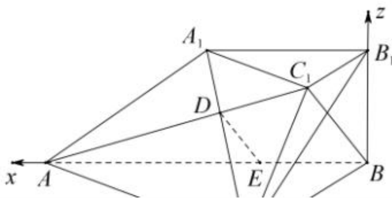
作 $C_1H\perp CB_1$，垂足为 H，因为 $A_1B_1\perp$ 平面 CBB_1C_1，所以 $A_1B_1\perp C_1H$，

所以 $C_1H\perp$ 平面 A_1B_1C，所以 $\angle C_1CB_1=\beta$，---10 分

又△B_1BC 为等腰直角三角形，

所以 $\alpha+\beta=\angle CB_1C_1+\angle C_1CB_1=\pi-\angle CC_1B_1=\angle C_1CB=\frac{\pi}{4}$. ---------

法 2：以 B 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}$ 为 x,y,z 轴的正方向建立平面直角坐标系，



如图. $A(6,0,0),C(0,4,0),B_1(0,0,2),A_1(3,0,2),C_1(0,2,2)$,

则 $\overrightarrow{B_1A_1}=(3,0,0),\overrightarrow{B_1C}=(0,4,-2),\overrightarrow{CC_1}=(0,-2,2)$.

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=3x=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1C}=4y-2z=0\end{cases}$，取 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,1,2)$，

平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，

所以 $\cos\alpha=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}\right|}{|\boldsymbol{n}|\left|\overrightarrow{BB_1}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. --8 分

$\sin\beta=\dfrac{\left|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}\right|}{|\boldsymbol{n}|\left|\overrightarrow{CC_1}\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. --- 10 分

又因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$. --- 12 分

【考查内容】棱锥的体积计算，直线与平面平行的性质定理，平面与平面垂直的性质定理，直线与平面所成角，平面与平面所成角，两角和的正、余弦公式。

20. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=ax(x^2-3)+1(a\neq0)$

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)$ 有三个零点 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$，且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线经过点 $(x_1,0)$，$x_0\neq x_1$，求证：$x_1=-2x_0$.

【解析】(1) $f'(x)=3a(x^2-1)$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$

(i)当 $a>0$ 时，$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

---3 分

(ii)当 $a<0$ 时，$x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

---6 分

(2) $f(x)$ 有三个零点，当且仅当 $f(-1)f(1)<0\Leftrightarrow a<-\dfrac{1}{2}$ 或 $a>\dfrac{1}{2}$，

$f(x_1)=ax_1^3-3ax_1+1=0$，①--8 分

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线方程为：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，

该切线经过点 $(x_1,0)$，则 $-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$，

即 $(3x_0^2-3)a(x_1-x_0)+ax_0^3-3ax_0+1=0$，②--10 分

①、②联立得：$(3x_0^2-3)a(x_1-x_0)+ax_0^3-3ax_0+1=ax_1^3-3ax_1+1$

$\Rightarrow(3x_0^2-3)a(x_1-x_0)-a(x_1-x_0)(x_0^2+x_0x_1+x_1^2)+3a(x_1-x_0)=0$

因为 $x_0\neq x_1,a\neq0$，

所以，$(3x_0^2-3)-(x_0^2+x_0x_1+x_1^2)+3=0\Rightarrow 2x_0^2-x_0x_1+x_1^2=0\Rightarrow(2x_0+x_1)(x_0-x_1)=0$

所以 $2x_0+x_1=0$，即 $x_1=-2x_0$. -- 12 分

【命题来源】改编自《选择性必修第二册 P99-T13》

【考查内容】利用导数研究三次函数的单调性，曲线的切线，

【背景】三次方程的韦达定理.

21. （本小题满分 12 分）

甲、乙两选手进行一场体育竞技比赛，采用 $2n-1$ 局 n 胜制 $(n\in\mathrm{N}^*)$ 的比赛规则，即先赢下 n 局比赛者最终获胜. 已知每局比赛甲获胜的概率为 p，乙获胜的概率为 $1-p$，比赛结束时，甲最终获胜的概率为 $P_n(n\in\mathrm{N}^*)$.

(1)若 $p=\frac{1}{2},n=2$，结束比赛时，比赛的局数为 X，求 X 的分布列与数学期望；

(2)若采用 5 局 3 胜制比采用 3 局 2 胜制对甲更有利，即 $P_3>P_2$，

(i)求 p 的取值范围；(ii)证明数列 $\{P_n\}$ 单调递增，并根据你的理解说明该结论的实际含义.

【解析】(1) $p=\frac{1}{2},n=2$，即采用 3 局 2 胜制，X 所有可能取值为 2,3，

$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},P(X=3)=C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)+C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ----------------------2 分

X 的分布列如下表：

X	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

所以 X 的数学期望为 $E(X)=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. -- 3 分

(2)采用 3 局 2 胜制：不妨设赛满 3 局，用 ξ 表示 3 局比赛中甲胜的局数，则 $\xi\sim B(3,p)$，甲最终获胜的概率为：

$$p_1=P(\xi=2)+P(\xi=3)=C_3^2p^2(1-p)+C_3^3p^3=p^2\left[C_3^2(1-p)+C_3^3p\right]=p^2(3-2p)$$ ----------4 分

采用 5 局 3 胜制：不妨设赛满 5 局，用 η 表示 5 局比赛中甲胜的局数，则 $\eta\sim B(5,p)$，甲最终获胜的概率为：

$$p_2=P(\eta=3)+P(\eta=4)+P(\eta=5)=C_5^3p^3(1-p)^2+C_5^4p^4(1-p)+C_5^5p^5$$
$$=p^3\left[C_5^3(1-p)^2+C_5^4p(1-p)+C_5^5p^2\right]=p^3(6p^2-15p+10)，$$ --------------------5 分

$p_2-p_1=p^3(6p^2-15p+10)-p^2(3-2p)=p^2(6p^3-15p^2+10p-3+2p)$

$=3p^2(2p^3-5p^2+4p-1)=3p^2(p-1)(2p^2-3p+1)=3p^2(1-p)^2(2p-1)>0$，

得 $\frac{1}{2}<p<1$. --7 分

(3)由(2)知 $\frac{1}{2}<p<1$.

$2n-1$ 局比赛中恰好甲赢了 n 局的概率为 $q_1=C_{2n-1}^np^n(1-p)^{n-1}$，

$2n-1$ 局比赛中恰好甲赢了 $n-1$ 局的概率为 $q_2=C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n$，

则 $2n-1$ 局比赛中甲至少赢 $n+1$ 局的概率为 P_n-q_1.

考虑 $2n+1$ 局比赛的前 $2n-1$ 局：

如果这 $2n-1$ 局比赛甲至少赢 $n+1$ 局，则无论后面结果如何都胜利，其概率为 P_n-q_1，

如果这 $2n-1$ 局比赛甲赢了 n 局，则需要后两场至少赢一局，其概率为 $q_1\left[1-(1-p)^2\right]$，

如果这 $2n-1$ 局比赛甲赢了 $n-1$ 局，则需要后两场都赢，其概率为 q_2p^2，

因此 $2n+1$ 局里甲最终获胜的概率为：$P_{n+1}=(P_n-q_1)+q_1\left[1-(1-p)^2\right]+q_2p^2$，

$P_{n+1}-P_n=-q_1+q_1\left[1-(1-p)^2\right]+q_2p^2=q_2p^2-q_1(1-p)^2$

$=C_{2n-1}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^n\cdot p^2-C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n-1}\cdot(1-p)^2$

$=C_{2n-1}^{n-1}p^{n+1}(1-p)^n-C_{2n-1}^{n}p^n(1-p)^{n+1}$

$=C_{2n-1}^{n-1}p^n(1-p)^n\left[p-(1-p)\right]=C_{2n-1}^{n-1}p^n(1-p)^n(2p-1)>0$

因此 $P_{n+1}>P_n$，即数列 $\{P_n\}$ 单调递增. --11 分

该结论的实际意义是：比赛局数越多，对实力较强者越有利. ------------------------------ 12 分

【命题来源】 改编自《选择性必修第三册 P75 例 3》

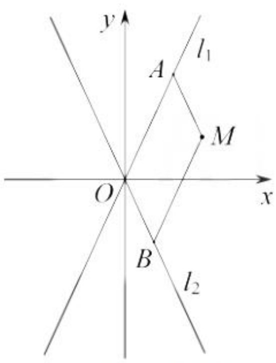
【考查内容】 离散型随机变量分布列，二项分布模型，三次函数的因式分解，概率与数列的综合应用.

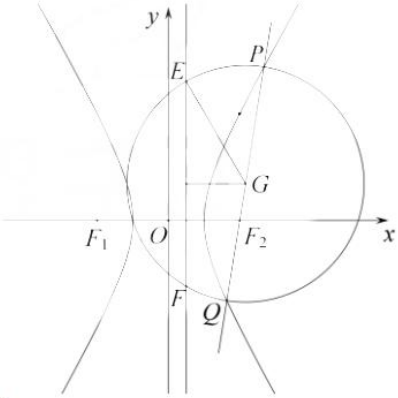
22.（本小题满分 12 分）

如图，已知直线 $l_1:y=\sqrt{3}x$，$l_2:y=-\sqrt{3}x$，M 是平面内一个动点，$MA\,//\,l_2$ 且 MA 与 l_1 相交于点 A（A 位于第一象限），$MB\,//\,l_1$，且 MB 与 l_2 相交于点 B（B 位于第四象限），若四边形 $OAMB$（O 为原点）的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求动点 M 的轨迹 C 的方程；

(2)过点 $F(2,0)$ 的直线 l 与 C 相交于 P,Q 两点，是否存在定直线 $l':x=t$，使以 PQ 为直径的圆与直线 l' 相交于 E,F 两点，且 $\dfrac{|EF|}{|PQ|}$ 为定值，若存在，求出 l' 的方程，若不存在，请说明理由.





【解析】 (1)设 $M(x_0,y_0)$，$A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$

MA 所在直线方程为 $y-y_0=-\sqrt{3}(x-x_0)$，

联立方程 $\begin{cases}y-y_0=-\sqrt{3}(x-x_0)\\ y=\sqrt{3}x\end{cases}$ 得 $x_A=\dfrac{\sqrt{3}x_0+y_0}{2\sqrt{3}}$，同理 $x_B=\dfrac{\sqrt{3}x_0-y_0}{2\sqrt{3}}$，---------------------2 分

$|OA|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\,|x_A-x_O|=2|x_A|,|OB|=\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}\,|x_B-x_O|=2|x_B|$

若四边形 $OAMB$ 的面积：

$S=|OA||OB|\sin\angle AOB=2|x_A|\cdot2|x_B|\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\cdot\dfrac{|\sqrt{3}x_0+y_0|}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{|\sqrt{3}x_0-y_0|}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}|3x_0^2-y_0^2|}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

化简得，$|3x_0^2-y_0^2|=3$.--- 4 分

因为 A 位于第一象限，B 位于第四象限，$\frac{\sqrt{3}x_0+y_0}{2\sqrt{3}}>0$，$\frac{\sqrt{3}x_0-y_0}{2\sqrt{3}}>0 \Rightarrow -\sqrt{3}x_0<y_0<\sqrt{3}x_0$，

所以 $3{x_0}^2-{y_0}^2=3\left(x_0\geq 1\right)$，即动点 M 的轨迹 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1\left(x\geq 1\right)$.-----------------5 分

(2)假设存在定直线 $l':x=t$，使 $\frac{|EF|}{|PQ|}$ 为定值.

设 $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，$PQ$ 中点 $G\left(x_G,y_G\right)$，直线 l 方程为 $x=my+2$，

联立方程 $\begin{cases}x=my+2\\3x^2-y^2=3,\left(x\geq 1\right)\end{cases} \Rightarrow \left(3m^2-1\right)y^2+12my+9=0$，----------------------------------- 6 分

由 $\begin{cases}3m^2-1\neq 0\\\Delta=144m^2-36\left(3m^2-1\right)=36\left(m^2+1\right)>0\\y_1y_2=\frac{9}{3m^2-1}<0\end{cases}$ 得 $0\leq m^2<\frac{1}{3}$

$y_1+y_2=\frac{12m}{1-3m^2},y_1y_2=\frac{-9}{1-3m^2}$ ---7 分

$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\left|y_1-y_2\right|=\frac{6\left(1+m^2\right)}{1-3m^2}$，---8 分

$y_G=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{6m}{1-3m^2},x_G=my_G+2=\frac{2}{1-3m^2}$，

设 G 到直线 $l':x=t$ 的距离 $d=\left|x_G-t\right|=\frac{\left|2-t+3tm^2\right|}{1-3m^2}$ --- 9 分

$|EF|=2\sqrt{|EG|^2-d^2}=2\sqrt{\left(\frac{|PQ|}{2}\right)^2-d^2}=\sqrt{|PQ|^2-4d^2}$

因为 $\frac{|EF|}{|PQ|}=\frac{\sqrt{|PQ|^2-4d^2}}{|PQ|}=\sqrt{1-4\left(\frac{d}{|PQ|}\right)^2}$ 为定值，所以 $\frac{d}{|PQ|}$ 为定值. --------------------- 10 分

由 $\frac{d}{|PQ|}=\frac{\left|2-t+3tm^2\right|}{6\left(1+m^2\right)}=\frac{1}{6}\left|\frac{2-t+3tm^2}{1+m^2}\right|=\frac{1}{6}\left|3t+\frac{2-4t}{1+m^2}\right|$ 为定值得 $2-4t=0$ 即 $t=\frac{1}{2}$，

即当 $l':x=\frac{1}{2}$ 时，$\frac{d}{|PQ|}$ 为定值 $\frac{1}{4}$，此时 $\frac{|EF|}{|PQ|}=\sqrt{1-4\left(\frac{d}{|PQ|}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以存在定直线 $l':x=\frac{1}{2}$，使 $\frac{|EF|}{|PQ|}$ 为定值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.-- 12 分

【命题来源】改编自《选择性必修第二册》P128-T11 和 P146-T16.

【考查内容】动点轨迹问题，直线与双曲线位置关系，直线与圆位置关系，探索性问题，定值问题.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。