2021届高三 二轮复习联考(二) 新高考卷

数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟，满分150分

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $U=\mathbf{R}, A=\{x|1<x<3\}, B=\{x|y=\log_2(x-2)\}$，则 $(\complement_U A)\cup B=$

A. $(1,2]$　　B. $[3,+\infty)$

C. $(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

2. 设复数 z 满足 $(\sqrt{3}-\mathrm{i})z=2$（i为虚数单位），则 $\bar{z}=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $\sqrt{3}+\mathrm{i}$　　D. $\sqrt{3}-\mathrm{i}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, x\in(0,1]\\ 2f(x-1), x\in(1,+\infty)\end{cases}$，则 $f(\frac{7}{2})=$

A. $-16\ln 2$　　B. $16\ln 2$　　C. $-8\ln 2$　　D. $-32\ln 2$

4. 已知平面 α,β,γ，直线 m,n，则下列命题中正确的是

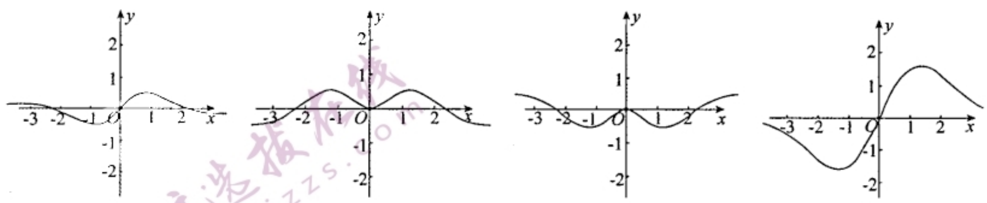
A. 若 $m/\!/\alpha, n\subset\alpha$，则 $m/\!/n$　　B. 若 $\alpha\perp\beta, m\subset\alpha, n\subset\beta$，则 $m\perp n$

C. 若 $\alpha\cap\beta=l, m/\!/\alpha, m/\!/\beta$，则 $m/\!/l$　　D. 若 $\alpha\cap\beta=l, m\subset\alpha, m\perp l$，则 $m\perp\beta$

5. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，$a_1=2, 4a_8+2a_{12}=9a_{10}$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_2 a_n+n$，则 $b_2+b_4+b_6+b_8+b_{10}=$

A. 40　　B. 55　　C. 35　　D. 60

6. 函数 $f(x)=\dfrac{3x\sin x-x^2}{e^x+e^{-x}}$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

7. 某学校举办冰雪知识竞赛，甲、乙两人分别从速度滑冰，花样滑冰，冰球滑冰，钢架雪车，跳台滑雪，冰壶等六个门类中各选三类作答，则甲、乙两人所选的类型中恰有两类相同的选法有(　　)种.

A. 180　　B. 225　　C. 200　　D. 400

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，直线 l 过点 F_2 与双曲线的右支交于 A,B 两点，若 $|AF_2|=2|BF_2|$，$\angle BAF_1=\frac{\pi}{3}$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{13}}{3}$　　B. $\frac{11}{3}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{14}}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分.

9. 2020 年 7 月 16 日，国家统计局发布 2020 年上半年中国经济数据. 数据显示，上半年，全国居民人均消费支出 9718 元，较 2019 年上半年全国人均消费支出 10330 元，下降约 5.9%（不考虑价格因素），图 1、图 2 分别为 2019 年上半年与 2020 年上半年居民人均消费支出构成，则下列说法正确的是

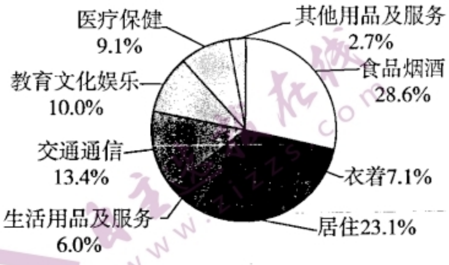


图 1

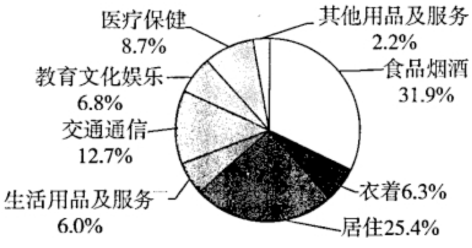
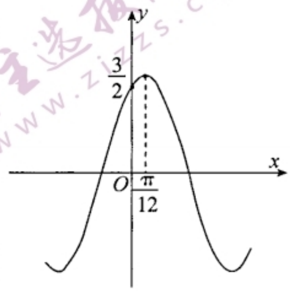


图 2

A. 2020 年上半年较 2019 年上半年人均生活用品及服务消费支出减少了
B. 2019 年上半年人均衣着消费支出和人均居住消费支出的总和超过了人均食品烟酒消费支出
C. 2020 年上半年较 2019 年上半年人均居住消费支出减少了
D. 2020 年上半年较 2019 年上半年人均教育文化娱乐消费支出比重降幅最大

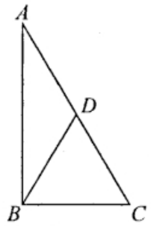
10. 已知函数 $f(x)=A\sin(2x+\varphi)$，$(A>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则下列说法正确的是

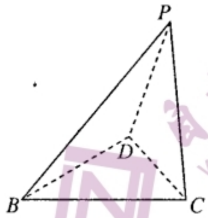


A. $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$
B. 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减
C. 函数 $g(x)=\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象可由函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到
D. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 中心对称

11. 已知 $a>0,b>0$，则下列结论正确的是
A. "$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充要条件
B. 若 $a>b>1$，则 $\log_a 2021<\log_b 2021$
C. 若 $a>b>e$（e 为自然对数的底数），则 $a^b>b^a$
D. 若 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1$，则 $a+b\geq 9$

12. 在直角三角形 ABC 中，$\angle B=\frac{\pi}{2}$，$AC=2BC=4$，D 为线段 AC 的中点，如图，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 翻折，得到三棱锥 $P-BCD$（点 P 为点 A 翻折到的位置），在翻折过程中，下列说法正确的是





A. $\triangle PBD$ 的外接圆半径为 2

B. 存在某一位置，使得 $PD\perp BD$

C. 存在某一位置，使得 $PB\perp CD$

D. 若 $PD\perp DC$，则此时三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的体积为 $\frac{32}{3}\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若 $\tan(\pi-\alpha)=4$，则 $\cos(2\alpha+\frac{3}{2}\pi)=$________.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，$|\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{\sqrt{42}}{2}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为________.

15. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，M 为椭圆 C 上任意一点，N 为圆 E：$(x-4)^2+(y-3)^2=1$ 上任意一点，则 $|MN|-|MF_1|$ 的最小值为________.

16. 已知函数 $f(x)=2axe^x-(a-1)e^{2x}+x^2$，$x\in(-1,1)$，若 $f(x)$ 有两个不同的零点，则实数 a 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在①$2a\sin C=c\tan A$；②$2a\cos B=2c-b$；

③$2\cos^2\frac{B+C}{2}=\cos 2A+1$；这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，已知________.

（1）求 A 的值；

（2）若 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，周长为 5，求 a 的值.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

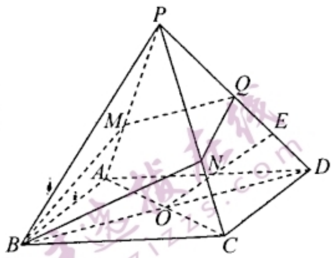
18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\cdot a_{n+1}}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19. (12分)



如图，在正四棱锥（底面是正方形，顶点在底面的射影为底面正方形的中心）$P-ABCD$ 中，$AB=2$，$PA=2\sqrt{2}$，AC 与 BD 交于点 O，平面 $BMQN$ 为直线 PD 的垂面，且与 PA，PC，PD 分别交于 M，N，Q 三点，点 E 在线段 PD 上，且满足 $PE=3ED$.

(1)证明：OE∥平面 $BMQN$；

(2)求直线 NQ 与平面 PAB 所成角的正弦值.

20. (12分)

已知过抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作直线 l 交抛物线 C 于 A，B 两点，当直线 l 垂直于 x 轴时，$|AB|=4$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)过直线 $l': x=-2$ 上一点 M 做抛物线 C 的两条切线，设切点为 P，Q.

求证：直线 PQ 过定点.

21. (12分)

某商场拟在年末进行促销活动，为吸引消费者，特别推出“玩游戏，送礼券”的活动，游戏规则如下：每轮游戏都抛掷一枚质地均匀的骰子（形状为正方体，六个面的点数分别为1，2，3，4，5，6），若向上点数不超过2点，获得1分，否则获得2分，进行若干轮游戏，若累计得分为19分，则游戏结束，可得到200元礼券，若累计得分为20分，则游戏结束，可得到纪念品一份，最多进行20轮游戏.

(1)当进行完3轮游戏时，总分为 X，求 X 的期望；

(2)若累计得分为 i 的概率为 p_i，（初始得分为0分，$p_0=1$）.

①证明：数列 $\{p_i-p_{i-1}\}$，$(i=1,2,\cdots,19)$ 是等比数列；

②求活动参与者得到纪念品的概率.

22. (12分)

已知函数 $f(x)=x^2-\ln x$.

(1)求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)证明：$\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{1}{4}x^2-x>-\dfrac{1}{4}$.

2021 届高三 二轮复习联考(二) 新高考卷

数学参考答案及评分意见

1. C 【解析】$B=(2,+\infty)$，$\complement_U A=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$，所以 $(\complement_U A)\cup B=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$，故选：C.

2. B 【解析】$z=\dfrac{2}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=\dfrac{2(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，故选：B.

3. C 【解析】$f(\dfrac{7}{2})=2f(\dfrac{5}{2})=4f(\dfrac{3}{2})=8f(\dfrac{1}{2})=8(-\ln 2)=-8\ln 2$，故选：C.

4. C 【解析】若 $m/\!/\alpha$，$n\subset\alpha$，则 m 与 n 可能平行或互为异面直线，故 A 错误；
若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 m 与 n 可能平行、相交或互为异面直线，也可能垂直，故 B 错误；
若 $\alpha\cap\beta=l$，$m/\!/\alpha$，$m/\!/\beta$，由线面平行的性质定理得 $m/\!/l$，故 C 正确；
若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$m\perp l$，则 m 与 β 相交，不一定垂直，故 D 错误，故选：C.

5. D 【解析】由题意知，等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2，公比 q 大于 1，$4a_8+2a_{12}=9a_{10}$，所以 $2+q^4=\dfrac{9}{2}q^2$，解得 $q^2=4$ 或 $q^2=\dfrac{1}{2}$，因为 $q>1$，所以 $q=2$，$a_n=2^n$，$b_n=\log_2 a_n+n=\log_2 2^n+n=2n$，所以数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，故 $b_2+b_4+b_6+b_8+b_{10}=5b_6=60$，故选：D.

6. B 【解析】$f(-x)=\dfrac{3(-x)\sin(-x)-(-x)^2}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-(-x)}}=\dfrac{3x\sin x-x^2}{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}=f(x)$，所以 $y=f(x)$ 为偶函数，排除 A、D，$f(x)=\dfrac{x\cdot(3\sin x-x)}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$，令 $g(x)=3\sin x-x$，$g(\dfrac{\pi}{2})=3-\dfrac{\pi}{2}>0$，则 $f(\dfrac{\pi}{2})>0$ 由此排除 C，故选：B.

7. A 【解析】甲、乙所选的类型有两类相同，从 6 类中选 2 类，有 C_6^2 种选法，再从余下的 4 类冰雪运动类型，选 2 类分别给甲、乙，有 A_4^2 种选法，按分步乘法原理可得共有 $C_6^2A_4^2=180$ 种选法，故选：A.

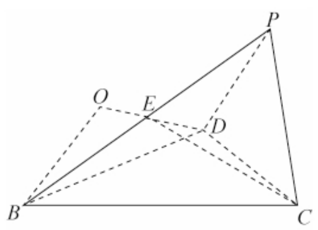
8. A 【解析】$|AF_2|=2|BF_2|$，设 $|BF_2|=t$，$|AF_2|=2t$，
则 $|BF_1|=t+6$，$|AF_1|=2t+6$，$|AB|=3t$，
当 $\angle BAF_1=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\cos\angle BAF_1=\dfrac{(6+2t)^2+(3t)^2-(6+t)^2}{2\times(6+2t)\cdot(3t)}=\dfrac{1}{2}$，化简得 $6t^2=6t$，
所以 $t=1$，故 $|AF_2|=2$，$|AF_1|=8$，
则在 $\triangle AF_1F_2$ 中，$|F_1F_2|^2=|AF_1|^2+|AF_2|^2-2|AF_1|\cdot|AF_2|\cos\dfrac{\pi}{3}$，
即 $4c^2=64+4-2\times2\times8\times\dfrac{1}{2}=52$，解得 $c=\sqrt{13}$，所以 $e=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，故选：A.

9. ABD 【解析】人均生活用品及服务消费支出占比均为 6%，2020 年上半年人均消费支出比

2019 年上半年人均消费支出小，故该项消费支出减少了，故 A 正确；2019 年上半年人均衣着消费支出和人均居住消费支出的总和占比为 30.2%，超过了人均食品烟酒消费支出所占比例 28.6%，故 B 正确；2019 年上半年人均居住消费支出为 $10330\times 23.1\%\approx 2386$ 元，2020 年上半年人均居住消费支出为 $9718\times 25.4\%\approx 2468$ 元，人均居住消费支出增加了，故 C 错误；由图可知，人均教育文化娱乐消费支出比重降幅最大，为 $10\%-6.8\%=3.2\%$，故 D 正确. 故选：ABD.

10. AC 【解析】由图象可知 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=A\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，由 $f(0)=A\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$ 得 $A=\sqrt{3}$，所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，故 A 正确；令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ 单调递减，在 $[\frac{7\pi}{12},\frac{2\pi}{3}]$ 单调递增，故 B 错误；$f(x+\frac{\pi}{12})=\sqrt{3}\sin(2(x+\frac{\pi}{12})+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{2})=\sqrt{3}\cos 2x=g(x)$，故 C 正确；令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的对称中心为 $(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},0)$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}=\frac{5\pi}{12}$，得 $k=\frac{7}{6}$，与 $k\in\mathbf{Z}$ 矛盾，故 D 错误；故选：AC.

11. ABD 【解析】由于 $a>0,b>0$，则"$a>b$"与"$a^2>b^2$"等价，故 A 正确；由 $a>b>1$ 得 $\log_{2021}a>\log_{2021}b>0$，则 $\frac{1}{\log_{2021}a}<\frac{1}{\log_{2021}b}$，则有 $\log_a 2021<\log_b 2021$，故 B 正确；设函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，则 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调递减，设 $a>b>\mathrm{e}$，则有 $f(a)<f(b)$，即 $\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}$，不等式两边同乘 ab，得 $b\ln a<a\ln b$，即 $\ln a^b<\ln b^a$，则有 $a^b<b^a$，故 C 错误；$a+b=(a+b)(\frac{4}{a}+\frac{1}{b})=5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=9$，当且仅当 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=1$，$\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$，即 $a=6,b=3$ 时取等号，故 D 正确，故选：ABD.



12. AD 【解析】在翻折过程中，$\triangle PBD\cong\triangle ABD$，$PD=DC=BC=2$，$PB=2\sqrt{3}$，易知 $\angle PDB=120°$，由正弦定理得 $2r=\frac{PB}{\sin\angle PDB}=4$（$r$ 为 $\triangle PBD$ 的外接圆半径），即 $r=2$，故 A 正确；在翻折过程中，$\angle PDB=120°$，故 B 错误；若 $PB\perp CD$，取 CD 中点 M，连接 BM,PM，由于 $\triangle BCD$ 为正三

角形,则 $BM\perp CD$,又 $BM\cap PB=B$,故 $CD\perp$ 平面 PBM,则 $PM\perp CD$,又 M 为 CD 中点,$PD=CD=2$,则 $\triangle PCD$ 为正三角形,易知 $BM=PM=\sqrt{3}$,则 $BM+PM=2\sqrt{3}=PB$,与已知矛盾,故 C 错误;若 $PD\perp DC$,则在三棱锥 $P-BCD$ 中,$PC=2\sqrt{2}$,由 $PB^2=BC^2+PC^2$ 知,$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$,取 PB 的中点 E,连接 DE,CE,则 $DE\perp PB$,且 $DE=1$,$CE=\frac{1}{2}PB=\sqrt{3}$,所以 $DE^2+CE^2=CD^2$,所以 $DE\perp CE$,所以 $DE\perp$ 平面 PBC.

设外接球的半径为 R,根据几何体可知,外接球的球心 O 在直线 DE 上,

则 $OE^2+BE^2=OB^2$,即 $(R-1)^2+(\sqrt{3})^2=R^2$,解得 $R=2$,

所以三棱锥 $P-BCD$ 的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32}{3}\pi$,故 D 正确,故选:AD.

13. $-\frac{8}{17}$ 【解析】$\tan\alpha=-\tan(\pi-\alpha)=-4$,

$\cos(2\alpha+\frac{3}{2}\pi)=\sin2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{8}{17}$.

14. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{2}+2=\frac{21}{2}$,所以 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}$,所以 $\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{1}{2}$,且 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>\in[0,\pi]$,所以 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\frac{2\pi}{3}$. 故答案为:$\frac{2\pi}{3}$.

15. $3\sqrt{2}-5$ 【解析】由题意得圆 E 的半径为 1,圆心坐标为 $E(4,3)$,则 $|MN|\geqslant|ME|-1$,由椭圆定义得 $|MF_1|=2a-|MF_2|=4-|MF_2|$,所以有 $|MN|-|MF_1|\geqslant|ME|-1-(4-|MF_2|)=|ME|+|MF_2|-5$,又因为 $|ME|+|MF_2|\geqslant|EF_2|=\sqrt{(4-1)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$,当 E,M,F_2 三点共线时,等号成立,所以 $|MN|-|MF_1|\geqslant3\sqrt{2}-5$. 即 $|MN|-|MF_1|$ 的最小值为 $3\sqrt{2}-5$.

16. $(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{e^2+1}{2e+1})$ 【解析】$f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$,令 $f(x)=0$,两边同除以 e^{2x} 可得 $2a\cdot\frac{x}{e^x}-(a-1)+(\frac{x}{e^x})^2=0$,

令 $t=\frac{x}{e^x}$,则 $t^2+2at-(a-1)=0$,设 $h(t)=t^2+2at-(a-1)$,

构造函数 $g(x)=\frac{x}{e^x}$,$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,则当 $x\in(-1,1)$,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,$-e=g(-1)<g(x)<g(1)=\frac{1}{e}$

由于函数 $y=f(x)$ 有两个不同的零点，则关于 t 的二次方程 $t^2+2at-(a-1)=0$ 两根 t_1、t_2 均满足 $-e<t_1<\frac{1}{e}$，$-e<t_2<\frac{1}{e}$，则有

$$\begin{cases}-e<-a<\frac{1}{e}\\ \Delta=4a^2+4(a-1)>0\\ h(-e)=e^2-2ae-(a-1)>0\\ h(\frac{1}{e})=\frac{1}{e^2}+2a\cdot\frac{1}{e}-(a-1)>0\end{cases}$$

，解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<\frac{e^2+1}{2e+1}$，实数 a 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{e^2+1}{2e+1})$.

17.【解析】(1) 若选择①，$2a\sin C=c\tan A$，则 $2\sin A\sin C=\sin C\frac{\sin A}{\cos A}$，化简得 $\cos A=\frac{1}{2}$， …… 2 分

由 $0<A<\pi$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$； …… 4 分

(2) 由 (1) 知 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 得 $bc=1$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $a^2=b^2+c^2-1$. …… 6 分

已知 $a+b+c=5$，$b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=(b+c)^2-2$， …… 8 分

则 $a^2=(b+c)^2-3=(5-a)^2-3$，解得 $a=\frac{11}{5}$. …… 10 分

(1) 若选择②，$2a\cos B=2c-b$，则 $2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2c-b$，化简得 $b^2+c^2-a^2=bc=2bc\cos A$，

$\cos A=\frac{1}{2}$， …… 2 分

由 $0<A<\pi$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$； …… 4 分

(2) 由 (1) 知 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 得 $bc=1$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $a^2=b^2+c^2-1$ …… 6 分

已知 $a+b+c=5$，$b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=(b+c)^2-2$， …… 8 分

则 $a^2=(b+c)^2-3=(5-a)^2-3$，解得 $a=\frac{11}{5}$. …… 10 分

(1) 若选择③，$2\cos^2\frac{B+C}{2}=\cos 2A+1$，则有 $\cos(B+C)+1=2\cos^2 A-1+1$，由 $\cos(B+C)=-\cos A$ 可得 $2\cos^2 A+\cos A-1=0$，

解得 $\cos A=\frac{1}{2}$, …… 2 分

由 $0<A<\pi$,可得 $A=\frac{\pi}{3}$; …… 4 分

(2)由(1)知 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$得 $bc=1$,

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,得 $a^2=b^2+c^2-1$ …… 6 分

已知 $a+b+c=5$,$b^2+c^2=(b+c)^2-2bc=(b+c)^2-2$, …… 8 分

则 $a^2=(b+c)^2-3=(5-a)^2-3$,解得 $a=\frac{11}{5}$. …… 10 分

18.【解析】(1)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$. …… 2 分

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-[\frac{3}{2}(n-1)^2+\frac{5}{2}(n-1)]=3n+1$, …… 5 分

所以 $a_n=3n+1$. …… 6 分

(2)$b_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}$, …… 8 分

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=(\frac{1}{4}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{10})+(\frac{1}{10}-\frac{1}{13})+\cdots+(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4})$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}$ …… 12 分

19.【解析】(1)证明:连接 BQ,由题意知 $PD\perp$平面 $BMQN$,所以 $BQ\perp PD$,

因为在 $\triangle PBD$ 中,$BD=PB=PD=2\sqrt{2}$,所以 Q 为 PD 的中点, …… 2 分

因为 $PE=3ED$,所以 $DE=\frac{1}{4}PD$,$QE=PD-DE-PQ=PD-\frac{1}{4}PD-\frac{1}{2}PD=\frac{1}{4}PD$,

即 $QE=ED$, …… 3 分

因为 $BO=OD$,所以 $OE/\!/BQ$, …… 5 分

因为 $OE\not\subset$平面 $BMQN$,$BQ\not\subset$平面 $BMQN$,所以 $OE/\!/$平面 $BMQN$ …… 6 分

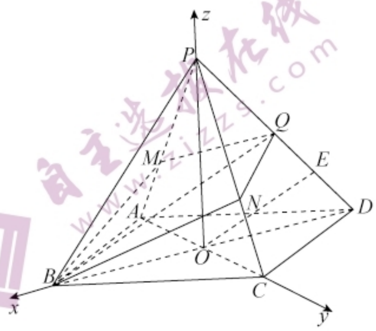
(2)在 $\triangle PCD$ 中,$\cos\angle CPD=\frac{PC^2+PD^2-CD^2}{2PC\cdot PD}=\frac{(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4}{2\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle PNQ$ 中,$\angle NQP=\frac{\pi}{2}$,$\cos\angle QPN=\frac{PQ}{PN}=\frac{\sqrt{2}}{PN}=\frac{3}{4}$,

所以 $PN=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,$CN=PC-PN=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

即点 N 为线段 PC 上靠近 C 的三等分点，…………………………………………………… 7 分

以 O 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $O(0,0,0)$，$A(0,-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,\sqrt{2},0)$，

$D(-\sqrt{2},0,0)$，$P(0,0,\sqrt{6})$， ……………………………… 8 分

$Q(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{6}}{2})$，$N(0,\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$，

所以$\overrightarrow{NQ}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,\sqrt{2},\sqrt{6})$，

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\\ \sqrt{2}y+\sqrt{6}z=0\end{cases}$，取 $z=1$，$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$，…………………………………………… 10 分

设直线 NQ 与平面 PAB 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{NQ},\boldsymbol{n}>|=\frac{|\overrightarrow{NQ}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{NQ}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{14}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{7}$， ……………………………… 11 分

综上，直线 NQ 与平面 PAB 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{7}$. …………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意知 $F(\frac{p}{2},0)$，直线 l 的方程为 $x=\frac{p}{2}$，代入方程得

$A(\frac{p}{2},p)$，$B(\frac{p}{2},-p)$，所以 $|AB|=2p=4$，所以 $p=2$，

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. …………………………………………………………… 4 分

(2)设 $M(x_0,y_0)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，其中 $x_0=-2$，$x_3=\frac{y_3^2}{4}$，$x_4=\frac{y_4^2}{4}$，

设直线 MP 的方程为 $y=k(x-\frac{y_3^2}{4})+y_3$，$k\neq0$ …………………………………………… 5 分

$\begin{cases}y=k(x-\frac{y_3^2}{4})+y_3\\ y^2=4x\end{cases}$联立方程得 $y^2-\frac{4}{k}y+\frac{4}{k}y_3-y_3^2=0$， ……………………………… 6 分

$\Delta=(-\frac{4}{k})^2-4(\frac{4}{k}y_3-y_3^2)=4(\frac{2}{k}-y_3)^2=0$，所以$\frac{2}{k}=y_3$，即 $k=\frac{2}{y_3}$， …………………… 7 分

所以直线 MP 的方程为 $y=\frac{2}{y_3}(x-\frac{y_3^2}{4})+y_3$，化简得 $y_3y=2x+2x_3$，

同理可得，直线 MQ 的方程为 $y_4y=2x+2x_4$，…………………………………………………… 9 分

点 $M(-2,y_0)$ 在直线 MP 上，所以 $y_3y_0=-4+2x_3$，同理 $y_4y_0=-4+2x_4$，

所以直线 PQ 的方程为 $y_0y=-4+2x$，即 $2(x-2)+y_0y=0$，…………………………… 11 分

由 $\begin{cases}x-2=0\\y=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$，所以直线 PQ 过定点 $(2,0)$．…………………………………… 12 分

21.【解析】由题意得每轮游戏获得 1 分的概率为 $\frac{1}{3}$、获得 2 分的概率为 $\frac{2}{3}$，

X 可能取值为 3，4，5，6，

$P(X=3)=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$，$P(X=4)=C_3^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})=\frac{2}{9}$，

$P(X=5)=C_3^1(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$，$P(X=6)=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$，

故其分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

……… 4 分

$E(X)=3\times\frac{1}{27}+4\times\frac{2}{9}+5\times\frac{4}{9}+6\times\frac{8}{27}=5$ …………………………………………… 5 分

(2) $n=1$，即累计得分为 1 分，是第 1 次掷骰子，向上点数不超过 2 点，$p_1=\frac{1}{3}$，则 $p_1-p_0=-\frac{2}{3}$，累计得分为 i 分的情况有两种，① $i=(i-2)+2$，即累计得分为 $i-2$ 分，又掷骰子点数超过 2 点，得 2 分，其概率为 $\frac{2}{3}p_{i-2}$，②累计得分为 $i-1$ 分，又掷骰子点数没超过 2 点，得 1 分，其概率为 $\frac{1}{3}p_{i-1}$，所以 $p_i=\frac{2}{3}p_{i-2}+\frac{1}{3}p_{i-1}(i=2,\cdots,19)$，所以 $p_i-p_{i-1}=-\frac{2}{3}(p_{i-1}-p_{i-2})$，$(i=2,\cdots,19)$，则数列 $\{p_i-p_{i-1}\}$，$(i=1,2,\cdots,19)$ 是首项为 $-\frac{2}{3}$，公比为 $-\frac{2}{3}$ 的等比数列

……… 9 分

则 $p_i - p_{i-1} = (-\frac{2}{3})^i$.

因此有 $p_1 - p_0 = -\frac{2}{3}, p_2 - p_1 = (-\frac{2}{3})^2, \cdots, p_i - p_{i-1} = (-\frac{2}{3})^i$，各式相加，得 $p_i - p_0 = -\frac{2}{5} \times [1 - (-\frac{2}{3})^i]$，则 $p_i = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times (-\frac{2}{3})^i = \frac{3}{5} \times [1 - (-\frac{2}{3})^{i+1}]$，$(i = 1, 2, \cdots, 19)$.

活动参与者得到纪念品的概率 $p_{20} = \frac{2}{3} p_{18} = \frac{2}{5} \times [1 - (-\frac{2}{3})^{19}] = \frac{2}{5} \times [1 + (\frac{2}{3})^{19}]$. …… ………………………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$，……………………… 1 分

则当 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 时，$f'(x) < 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 单调递减；

当 $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时，$f'(x) > 0$，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 单调递增；……………………… 3 分

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$，单调递增区间为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$. ……………………… 4 分

(2) $\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{4}x^2 - x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\ln x}{x}$，设 $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\ln x}{x}$，$g'(x) = \frac{x^3 - 2 + 2\ln x}{2x^2}$，

设 $\varphi(x) = x^3 - 2 + 2\ln x$，易知 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，且 $\varphi(1) = -1 < 0$，$\varphi(2) = 6 + 2\ln 2 > 0$，所以存在 $x_0 \in (1, 2)$，使得 $\varphi(x_0) = {x_0}^3 - 2 + 2\ln x_0 = 0$，即 $\ln x_0 = \frac{2 - {x_0}^3}{2}$，则 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增. ………………………………………………… 8 分

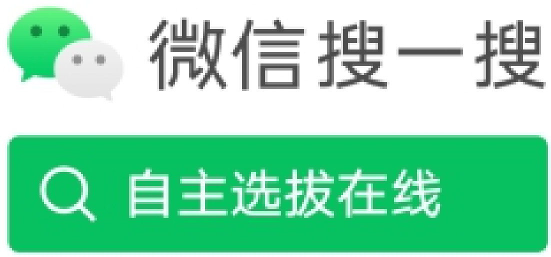
所以 $g(x) \geq g(x_0) = \frac{1}{4}x_0^2 - \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{4}x_0^2 - \frac{2 - {x_0}^3}{2x_0} = \frac{3}{4}x_0^2 - \frac{1}{x_0}$，……………………… 10 分

设 $m(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{x}$，易知函数 $m(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{x}$ 在 $x \in (1, 2)$ 单调递增，则 $m(x) > m(1) = -\frac{1}{4}$，即 $g(x) \geq g(x_0) > -\frac{1}{4}$，所以 $\frac{f(x)}{x} + \frac{1}{4}x^2 - x > -\frac{1}{4}$. ……………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》