绝密★启用前

2024 届高三 10 月统一调研测试

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1\}$　　B. $\{2\}$　　C. $\{-1,0\}$　　D. $\{1,2\}$

2. $\cos 330°\tan 660°=$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $-\dfrac{3}{2}$

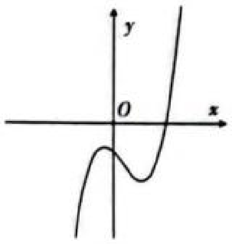
3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,t)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

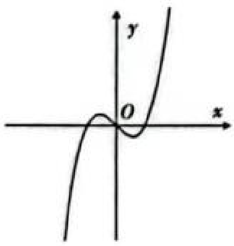
4. 已知 $(1-2i)z=a+4i(a\in\mathbf{R})$，若 $z+1$ 为纯虚数，则 a 的值为

A. 1　　B. 3　　C. -2　　D. -13

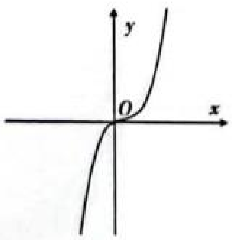
5. 函数 $f(x)=x^3+ax^2-x$ 的大致图象可能是



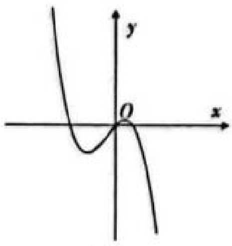
A.



B.



C.



D.

6. 已知函数$f(x)=x\cos x$，$g(x)=\ln(e^{2x}+1)-x-1$，则

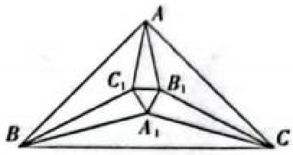
A. $f(x)$的图象关于y轴对称，$g(x)$的图象关于点$(0,-1)$对称

B. $f(x)$的图象关于y轴对称，$g(x)$的图象关于y轴对称

C. $f(x)$的图象关于原点对称，$g(x)$的图象关于点$(0,-1)$对称

D. $f(x)$的图象关于原点对称，$g(x)$的图象关于y轴对称

7. 将三角形的3个内角三等分，靠近某边的两条角三分线相交得到一个交点，则这样的3个交点的连线构成正三角形，该定理称为莫利定理，其中的正三角形称为该三角形的莫利三角形. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\angle ACB=\frac{\pi}{4}$，$BC=2\sqrt{2}$，则$\triangle ABC$的莫利三角形$A_1B_1C_1$的面积为



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{7\sqrt{3}}{2}-3$　　C. $\frac{7\sqrt{3}}{2}-6$　　D. $7\sqrt{3}-12$

8. 若$a=7^{\frac{1}{6}}+7^{-\frac{1}{2}}$，$b=\log_3 5$，$c=\log_7 2+\log_{\sqrt{7}} 5$，则

A. $b<a<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $a<b<c$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知复数$z=3-i^3$，则下列结论正确的是

A. $|z|=\sqrt{10}$

B. z在复平面内对应的点位于第二象限

C. $z(1-i)$的虚部为-2

D. z是方程$x^2-6x+10=0$的根

10. 已知函数$f(x)=\tan(3x+\varphi)\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，则下列结论正确的是

A. 若$\varphi=1$，则$f(1)<f(2)$

B. 把$f(x)$的图象上所有点的横坐标伸长到原来的3倍（纵坐标不变），得到$y=\tan(x+\varphi)$的图象

C. 若$f(x_1)=f(x_2)$，则x_1-x_2是$\frac{\pi}{3}$的整数倍

D. 若$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$上单调递增，则$\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{8}\right]$

11. 下列各式的值是方程$2x^2-5x+2=0$的根的为

A. $(\lg 2)^2+\lg 2\lg 5-\lg 0.2$

B. $\cos 40°-2\sin 50°\sin 10°$

C. $\tan 67.5°-\tan 22.5°$

D. $\frac{\sin 20°\cos^2 20°(1+\sqrt{3}\tan 20°)}{\sin 80°}$

12. 已知定义域为$(0,+\infty)$的函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且$f'(x)+\sin x=x+1$，则

A. 若$a,b\in(0,+\infty)$，且$a\neq b$，则$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}>0$

B. $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})<\frac{1}{2}$

C. $f(x)$图象上任意两点连线的斜率恒大于1

D. 若对$\forall x\in(0,+\infty)$，$f(e^x-a\ln x)>f(a\ln a)+e^x-a\ln(ax)$，则$0<a<e$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，若 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，则 $\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{CD}|}=$ ________.

14. 已知命题 p："$\exists x\in[0,2],x^2-2x\geqslant a$"，则 p 为真命题的一个必要不充分条件是________.

15. 若函数 $f(x)=\begin{cases}6-3x, x<a,\\4-x^2, x>a\end{cases}$ 的值域为 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

16. 折纸是一种玩具，也是一项思维活动，如图，把一个足够长的长方形纸条打好一个结，然后拉紧压平，再截去伸出的部分，就得到一个正五边形 $ABCDE$，若 $AB=1$，把该正五边形折纸展开，得到一个纸条，记该纸条的周长为 c，则 $(c-10)\cos\angle DAE=$ ________.

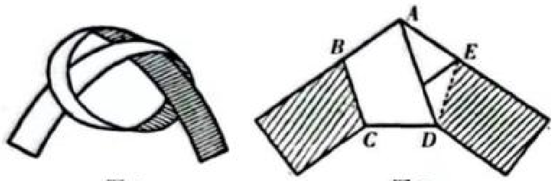


图 1　　图 2

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-1(\omega>0)$ 的图象上相邻两条对称轴之间的距离是 $\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的值域；

(2)求 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线 l 的方程.

18. (12 分)已知向量 $\boldsymbol{a}=\left(\sin\alpha,\frac{3}{5}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(5\cos\alpha,\frac{25}{3}\sin^2\alpha-\frac{4}{3}\right)$，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

(1)求 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值；

(2)若 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ 且 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，点 O 为坐标原点，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量.

19. (12 分)已知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,且 $x\geqslant1$ 时 $f(x)=-x^2+3x-2$.

(1)求 $x<1$ 时 $f(x)$ 的解析式;

(2)是否存在实数 m,n 满足 $m<n<1$,且 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域是 $[2m,2n]$,若存在,求出 m,n 的值;若不存在,请说明理由.

20. (12 分)记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2=\frac{2\sin A\cos C}{\sin B}+2\cos B$.

(1)求 B;

(2)若 $a=3,c=5$,从下面两个条件中选一个,求 BM^2+BN^2 的最小值.

①点 M,N 分别是边 BC,BA 上的动点(不包含端点),且 $MN=\frac{1}{2}b$;

②点 M,N 是边 AC 上的动点(不包含端点且 $AN>AM$),且 $MN=4$.

注:如选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

21. (12 分)已知函数 $f(x)=e^{2x}-(4a+2)e^x+4ax+3$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $x\in[0,1]$ 时,$f(x)\leqslant0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=(x+2)\ln(x+1)\ (x>0)$.

(1)证明:$f(x)>2x$;

(2)若 $\frac{8}{9}<a<1$,判断方程 $f(x)=\frac{2x}{a}$ 的实根个数.

2024 届高三 10 月统一调研测试

数学参考答案及评分细则

1.【答案】B

【解析】因为 $A=\{-1,0,1,2\}$,$B=\{x|y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\}=\{x|x>1\}$,所以 $A\cap B=\{2\}$,故选 B.

2.【答案】D

【解析】$\cos 330°\tan 660°=\cos(360°-30°)\tan(720°-60°)=\cos 30°(-\tan 60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})=-\frac{3}{2}$,故选 D.

3.【答案】A

【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2-(-2-t)=0$,所以 $t=-4$,$\boldsymbol{b}=(-2,-4)$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,故选 A.

4.【答案】B

【解析】因为$(1-2i)z=a+4i$,所以 $z=\frac{a+4i}{1-2i}=\frac{(a+4i)(1+2i)}{1^2+2^2}=\frac{a-8}{5}+\frac{2a+4}{5}i$,所以 $z+1=\frac{a-3}{5}+\frac{2a+4}{5}i$,因为 $z+1$ 为纯虚数,所以$\begin{cases}a-3=0,\\2a+4\neq0,\end{cases}$ 所以 $a=3$,故选 B.

5.【答案】B

【解析】由 $f(0)=0$ 可得 $f(x)$ 的图象过原点,排除 A;$f'(x)=3x^2+2ax-1$,$\Delta=4a^2+12>0$,$f(x)$ 有 2 个极值点,排除 C;存在 t,当 $x>t$ 时恒有 $f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(t,+\infty)$ 上单调递增,排除 D(也可根据 $f'(0)<0$,$x=0$ 在递减区间内,排除 CD),故选 B.

6.【答案】D

【解析】由 $f(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$,可得 $f(x)$ 的图象关于原点对称,由 $g(x)=\ln(e^{2x}+1)-x-1=\ln(e^x+e^{-x})-1$,可得 $g(x)$ 是偶函数,$g(x)$ 的图象关于 y 轴对称,故选 D.

7.【答案】C

【解析】由题意可得 $AB=AC=2$,$AB\perp AC$,在 $\triangle ABC_1$ 中,$\angle BAC_1=\frac{\pi}{6}$,$\angle ABC_1=\frac{\pi}{12}$,$\angle AC_1B=\frac{3\pi}{4}$,由正弦定理得 $AC_1=\frac{AB\sin\angle ABC_1}{\sin\angle AC_1B}=\frac{2\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$,同理可得 $AB_1=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$,$AB_1=AC_1$,$\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{6}$,所以 $B_1C_1=2AC_1\sin\frac{\angle B_1AC_1}{2}=4\sqrt{2}\sin^2\frac{\pi}{12}=4\sqrt{2}\times\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$,所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2}-\sqrt{6})^2=\frac{7\sqrt{3}}{2}-6$,故选 C.

8.【答案】A

【解析】解法一:因为 $a=7^{\frac{1}{6}}+7^{-\frac{1}{2}}<8^{\frac{1}{6}}+4^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$,$a=7^{\frac{1}{6}}+7^{-\frac{1}{2}}>\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{6}}+8^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{160}{64}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}>\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{4}+\frac{1}{3}=\frac{19}{12}>\frac{3}{2}$,$b=\log_3 5<\log_3\sqrt{27}=\frac{3}{2}$,$c=\log_7 2+\log_7 25=\log_7 50>\log_7 49=2$,所以 $b<a<c$,故选 A.

解法二:因为 $b=\log_3 5<\log_3\sqrt{27}=\frac{3}{2}$,$c=\log_7 2+\log_7 25=\log_7 50>\log_7 49=2$,所以 $b<c$,排除 BC,因为 $a=7^{\frac{1}{6}}+$

$7^{-\frac{1}{2}}$，所以 $a^2=\sqrt[3]{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{\sqrt[3]{7}}>\sqrt[3]{\frac{125}{27}}+\frac{1}{7}+\frac{2}{\sqrt[3]{8}}=\frac{5}{3}+\frac{1}{7}+1=2\frac{17}{21}>2\frac{1}{4}$，所以 $a>\frac{3}{2}$，排除 D，故选 A.

9.【答案】ACD

【解析】因为 $z=3-i^3=3+i$，所以 $|z|=\sqrt{10}$，A 正确；z 在复平面内对应的点为 $(3,1)$，位于第一象限，B 错误；$z(1-i)=(3+i)(1-i)=4-2i$，虚部为 -2，C 正确；由 $z=3+i$ 得 $(z-3)^2=-1$，即 $z^2-6z+10=0$，所以 z 是方程 $x^2-6x+10=0$ 的根，D 正确，故选 ACD.

10.【答案】BCD

【解析】当 $\varphi=1$ 时，$f(1)=\tan 4=\tan(\pi+4)$，$f(2)=\tan 7$，$2\pi<7<4+\pi<\frac{5\pi}{2}$，$y=\tan x$ 在 $\left(2\pi,\frac{5\pi}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $\tan 7<\tan(4+\pi)=\tan 4$，所以 $f(2)<f(1)$，A 错误；$f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 3 倍（纵坐标不变），得到 $y=\tan(x+\varphi)$ 的图象，B 正确；若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 x_1-x_2 是最小正周期的整数倍，C 正确；当 $0<x<\frac{\pi}{8}$ 时，$\varphi<3x+\varphi<\frac{3\pi}{8}+\varphi$，所以当 $\frac{3\pi}{8}+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，即 $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$ 上单调递增，D 正确，故选 BCD.

11.【答案】BCD

【解析】方程 $2x^2-5x+2=0$ 的根为 2 或 $\frac{1}{2}$，$(\lg 2)^2+\lg 2\lg 5-\lg 0.2=\lg 2(\lg 2+\lg 5)+\lg 5=\lg 2+\lg 5=1$，A 错误；$\cos 40°-2\sin 50°\sin 10°=\cos(50°-10°)-2\sin 50°\sin 10°=\cos(50°+10°)=\cos 60°=\frac{1}{2}$，B 正确；$\tan 67.5°-\tan 22.5°=\tan(67.5°-22.5°)(1+\tan 67.5°\tan 22.5°)=1\times(1+1)=2$，C 正确；$\frac{\sin 20°\cos^2 20°(1+\sqrt{3}\tan 20°)}{\sin 80°}=\frac{\sin 40°\left(\frac{1}{2}\cos 20°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20°\right)}{\sin 80°}=\frac{\sin 40°\cos 40°}{\sin 80°}=\frac{1}{2}$，D 正确，故选 BCD.

12.【答案】AC

【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $f'(x)=x+1-\sin x>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，A 正确；因为 $f'(x)-x=1-\sin x\geqslant 0$，所以 $y=f(x)-\frac{1}{2}x^2$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(\sqrt{3})-\frac{3}{2}>f(\sqrt{2})-1$，即 $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})>\frac{1}{2}$，B 错误；设 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$ 是 $f(x)$ 图象上任意两点，因为 $f'(x)-1=x-\sin x$，设 $g(x)=x-\sin x(x>0)$，则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$，$f'(x)-1>0$，所以 $y=f(x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\frac{f(x_1)-x_1-(f(x_2)-x_2)}{x_1-x_2}>0$，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>1$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ 表示 A，B 两点连线的斜率，所以 C 正确；由 $f(e^x-a\ln x)>f(a\ln a)+e^x-a\ln(ax)$ 得 $f(e^x-a\ln x)-(e^x-a\ln x)>f(a\ln a)-a\ln a$，因为 $y=f(x)-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $e^x-a\ln x>a\ln a>0$，即 $e^{x-\ln a}+x-\ln a>e^{\ln x}+\ln x$，且 $a>1$，因为 $y=e^x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $x-\ln a>\ln x$，即 $\ln a<x-\ln x$，设 $h(x)=x-\ln x$，则 $h'(x)=\frac{x-1}{x}$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(1)=1$，即 $x-\ln x\geqslant 1$，所以 $\ln a<1$，所以 $1<a<e$，D 错误，故选 AC.

13.【答案】$\frac{3}{2}$（填写 $1\frac{1}{2}$，1.5 都正确，填写 3/2 不给分）

【解析】因为点 D 在边 BC 上，若 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda+\frac{3}{5}=1$，$\lambda=\frac{2}{5}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+\frac{3}{5}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$，所以 $\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BD}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$，所以 $\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\frac{3}{2}$.

14.【答案】$a<1$（答案不唯一，如 $a<2$，$a\leqslant 3$ 等）

【解析】由 $0\leqslant x\leqslant 2$ 得 $-1\leqslant x^2-2x\leqslant 0$，所以 p 为真命题的充要条件是 $a\leqslant 0$，一个必要不充分条件是 $a<1$.

15.【答案】$(1,2)$（填写$\{a|1<a<2\}$，$1<a<2$都正确）

【解析】若$a\leqslant0$，当$x<a$时，$f(x)=6-3x>6-3a>6$，当$x>a$时，$f(x)=4-x^2\leqslant4$，$f(x)$的值域不是$\mathbf{R}$；若$a>0$，则$x>a$时，$f(x)=4-x^2<4-a^2$，由$f(x)$的值域为$\mathbf{R}$，得$\begin{cases}a>0,\\4-a^2>6-3a,\end{cases}$解得$1<a<2$.

16.【答案】2（不求出具体数值不给分）

【解析】在等腰梯形$ABCD$中$AB=BC=1$，$\angle ABC=108°$，$\angle BAD=72°$，$\angle DAE=36°$，$AD=BC+2AB\cos\angle BAD==1+2\cos72°$，展开后的纸条如下图，该纸条的周长$c=6BC+4AD=10+8\cos72°=10+8\sin18°$，所以$(c-10)\cdot\cos\angle DAE=8\sin18°\cos36°=\dfrac{8\sin18°\cos36°\cos18°}{\cos18°}=\dfrac{2\sin72°}{\cos18°}=2$.

17. 解：(1)因为$f(x)$图象上相邻两条对称轴之间的距离是$\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\dfrac{\pi}{\omega}=\dfrac{\pi}{2}$，$\omega=2$，$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$，(1 分)

因为$0<x<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\dfrac{\pi}{6}<2x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$，

因为$y=\sin x$在$\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{6}\right)$上单调递减，且$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\dfrac{\pi}{2}=1$，$\sin\dfrac{7\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$，(3 分)

所以$-\dfrac{1}{2}<\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant1$，$-2<2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1\leqslant1$，(4 分)

所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上的值域为$(-2,1]$.(5 分)

(2)因为$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)-1$，所以$f'(x)=4\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，(7 分)

所以$f(0)=2\sin\dfrac{\pi}{6}-1=0$，$f'(0)=4\cos\dfrac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$，(8 分)

所以切线l的方程为$y=2\sqrt{3}x$，即$2\sqrt{3}x-y=0$.(10 分)

【评分细则】

(i)第(1)小题，根据$\dfrac{\pi}{6}<2x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{7\pi}{6}$，直接写出$-\dfrac{1}{2}<\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant1$，不扣分；

(ii)第(2)小题，l的方程写成$y=2\sqrt{3}x$不扣分；

(iii)如用其他解法，若正确，也给满分.

18. 解：(1)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$两边平方得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，(1 分)

因为$\boldsymbol{a}=\left(\sin\alpha,\dfrac{3}{5}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(5\cos\alpha,\dfrac{25}{3}\sin^2\alpha-\dfrac{4}{3}\right)$，

所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5\sin\alpha\cos\alpha+5\sin^2\alpha-\dfrac{4}{5}=\dfrac{5}{2}\sin2\alpha+\dfrac{5-5\cos2\alpha}{2}-\dfrac{4}{5}=0$，(3 分)

整理得$\sin2\alpha-\cos2\alpha=-\dfrac{17}{25}$，(4 分)

所以$\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos2\alpha-\sin2\alpha)=\dfrac{17\sqrt{2}}{50}$.(6 分)

(2)因为$-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$且$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，

所以$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$，(7 分)

所以$\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$，$\boldsymbol{b}=(3,4)$，

所以 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=5,|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{26}$,(10 分)

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 方向上的投影数量为

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{1-25}{\sqrt{26}}=-\frac{12\sqrt{26}}{13}.\ (12\text{ 分})$$

【评分细则】

如用其他解法,若正确,也给满分.

19. 解:(1)因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,所以 $f(2-x)=f(x)$,(2 分)

当 $x<1$ 时,$2-x>1$,(4 分)

所以 $f(x)=f(2-x)=-(2-x)^2+3(2-x)-2=-x^2+x(x<1)$. (6 分)

(2)假设存在 m,n 满足 $m<n<1$,且 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的值域是 $[2m,2n]$,

易得 $x<1$ 时 $f(x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}$,由对称性可得 $x\in\mathbf{R}$ 时 $f(x)\leqslant\frac{1}{4}$,

所以 $2n\leqslant\frac{1}{4}$,$n\leqslant\frac{1}{8}$,(8 分)

又 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上单调递增,(9 分)

所以 $f(m)=2m$,$f(n)=2n$,(10 分)

即 m,n 是 $-x^2+x=2x$ 的两个根,所以 $m=-1,n=0$. (12 分)

【评分细则】

如用其他解法,若正确,也给满分.

20. 解:(1)由正弦定理得 $\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2=\frac{2\sin A\cos C}{\sin B}+2\cos B=\frac{2a\cos C}{b}+2\cos B$,

所以 $a^2-c^2=2ab\cos C+2b^2\cos B$,(2 分)

由余弦定理得 $a^2-c^2=a^2+b^2-c^2+2b^2\cos B$,

即 $b^2(1+2\cos B)=0$,(4 分)

所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$,$B=\frac{2\pi}{3}$. (5 分)

(2)若选①,

因为 $B=\frac{2\pi}{3}$,$a=3$,$c=5$,

所以 $b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=\sqrt{3^2+5^2-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=7$,

所以 $MN=\frac{1}{2}b=\frac{7}{2}$,(7 分)

设 $BM=x$,$BN=y$,

由余弦定理得 $x^2+y^2-2xy\cos\frac{2\pi}{3}=MN^2=\frac{49}{4}$,即 $x^2+y^2+xy=\frac{49}{4}$,(9 分)

因为 $x^2+y^2+xy\leqslant x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{3}{2}(x^2+y^2)$,

所以 $x^2+y^2\geqslant\frac{2}{3}\times\frac{49}{4}=\frac{49}{6}$,当且仅当 $x=y=\frac{7\sqrt{3}}{6}$ 时取等号,

所以 BM^2+BN^2 的最小值为 $\frac{49}{6}$. (12 分)

若选②,

因为 $B=\frac{2\pi}{3}$,$a=3$,$c=5$,

所以 $b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=\sqrt{3^2+5^2-2\times3\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=7$,(7 分)

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{13}{14}$,$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\frac{11}{14}$,(8 分)

设 $AM=x(0<x<3)$,因为 $MN=4$,则 $CN=3-x$,

在△BAM 中由余弦定理得 $BM^2=5^2+x^2-10x\cdot\frac{13}{14}=x^2-\frac{65}{7}x+25$,

在△BCN 中由余弦定理得 $BN^2=3^2+(3-x)^2-6(3-x)\cdot\frac{11}{14}=x^2-\frac{9}{7}x+\frac{27}{7}$,(10 分)

所以 $BM^2+BN^2=2x^2-\frac{74}{7}x+\frac{202}{7}=2\left(x-\frac{37}{14}\right)^2+\frac{1\,459}{98}$,

所以当 $x=\frac{37}{14}$时,BM^2+BN^2 取得最小值$\frac{1\,459}{98}$.(12 分)

【评分细则】

(i)第(2)小题求最值不指出等号成立条件扣 1 分;

(ii)如用其他解法,若正确,也给满分.

21. 解:(1)因为$f(x)=e^{2x}-(4a+2)e^x+4ax+3$,

所以$f'(x)=2e^{2x}-(4a+2)e^x+4a=2(e^x-1)(e^x-2a)$,(1 分)

因为 $e^x>0$,当 $a\leqslant0$ 时,$e^x-2a>0$,

所以当 $x\in(-\infty,0)$时 $f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,(2 分)

当 $a>0$ 时,由 $f'(x)=0$,得 $x=0$ 或 $x=\ln(2a)$,

当 $2a=1$ 即 $a=\frac{1}{2}$时,$f'(x)\geqslant0$,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

当 $0<a<\frac{1}{2}$时,$\ln(2a)<0$,$x\in(\ln(2a),0)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,$x\in(-\infty,\ln(2a))$或 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,(4 分)

当 $a>\frac{1}{2}$时,$\ln(2a)>0$,$x\in(0,\ln(2a))$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;$x\in(-\infty,0)$或 $x\in(\ln(2a),+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,(5 分)

综上可得,$a\leqslant0$ 时,$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增;$a=\frac{1}{2}$时,$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;$0<a<\frac{1}{2}$时,$f(x)$在$(\ln(2a),0)$上单调递减,在$(-\infty,\ln(2a))$,$(0,+\infty)$上单调递增;$a>\frac{1}{2}$时,$f(x)$在$(0,\ln(2a))$上单调递减,在$(-\infty,0)$,$(\ln(2a),+\infty)$上单调递增.(6 分)

(2)由题可得 $f(0)=-4a+2\leqslant0$,所以 $a\geqslant\frac{1}{2}$,(7 分)

当 $a=\frac{1}{2}$时,$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,则 $x\in(0,1]$时 $f(x)>0$,不满足题意,(8 分)

当 $a>\frac{1}{2}$时,$f(x)$在$(0,\ln(2a))$上单调递减,在$(\ln(2a),+\infty)$上单调递增,

当 $\ln(2a)\geqslant1$,即 $a\geqslant\frac{e}{2}$时,$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,$x\in(0,1]$时 $f(x)<f(0)=0$,满足题意,(9 分)

当 $0<\ln(2a)<1$,即$\frac{1}{2}<a<\frac{e}{2}$时,$f(x)$在$(0,\ln(2a))$上单调递减,在$(\ln(2a),1)$上单调递增,

由 $x\in[0,1]$时,$f(x)\leqslant0$ 恒成立,则 $f(1)=(4-4e)a+e^2-2e+3\leqslant0$,即 $a\geqslant\frac{e^2-2e+3}{4e-4}$,

因为$\frac{e^2-2e+3}{4e-4}-\frac{1}{2}=\frac{(e-2)^2+1}{4e-4}>0$,$\frac{e^2-2e+3}{4e-4}-\frac{e}{2}=\frac{3-e^2}{4e-4}<0$,

所以$\frac{e^2-2e+3}{4e-4}\leqslant a<\frac{e}{2}$,(11 分)

综上得实数 a 的取值范围为$\left[\frac{e^2-2e+3}{4e-4},+\infty\right)$.(12 分)

【评分细则】

如用其他解法,若正确,也给满分.

22. (1)证明:因为 $x>0$,所以 $f(x)>2x$,即 $\ln(x+1)>\frac{2x}{x+2}$,

即 $\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}>0$,(1 分)

设 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}(x>0)$,

则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}>0$,

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,(3 分)

所以 $g(x)>g(0)=0$,即 $\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}>0$,(4 分)

所以 $x>0$ 时 $f(x)>2x$.(5 分)

(2)解:方程 $f(x)=\frac{2x}{a}$,即$(x+2)\ln(x+1)=\frac{2x}{a}$,

即$\frac{2x}{x+2}-a\ln(x+1)=0$,(7 分)

设 $h(x)=\frac{2x}{x+2}-a\ln(x+1)(x>0)$,

则 $h'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}-\frac{a}{x+1}=-\frac{ax^2+(4a-4)x+4a-4}{(x+1)(x+2)^2}$,(8 分)

设 $m(x)=ax^2+(4a-4)x+4a-4$,

因为$\frac{8}{9}<a<1$,

所以 $m(0)=4a-4<0$,$m(1)=9a-8>0$,

所以 $m(x)$在$(0,+\infty)$上有唯一实根 x_0,且 $x_0\in(0,1)$,

当 $x\in(0,x_0)$时,$m(x)<0$,$h'(x)>0$,$h(x)$单调递增,

当 $x\in(x_0,+\infty)$时,$m(x)>0$,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,(10 分)

又 $h(0)=0$,所以 $h(x_0)>0$,$h(x)$在$(0,x_0)$上没有零点,

因为 $x_0<1$,$e^3>1$,$h(e^3)=\frac{2e^3}{e^3+2}-a\ln(e^3+1)<2-3a<2-3\times\frac{8}{9}=-\frac{2}{3}<0$,

所以 $h(x)$在$(0,e^3)$上有唯一零点 x_0,

所以方程 $f(x)=\frac{2x}{a}$在$(0,+\infty)$上有唯一实根 x_0.(12 分)

【评分细则】

如用其他解法,若正确,也给满分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。