2020 届普通高中教育教学质量监测考试

理科数学　参考答案

本试卷防伪处为：

如图是某地某月 1 日至 15 日的日均温度变化

x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系

1. C 【解析】$x^2-x-12=(x-4)(x+3)>0$，解得 $x>4$ 或 $x<-3$，$2^x\leqslant 64=2^6\Rightarrow x\leqslant 6$，所以 $M\cap N=\{x|x<-3$ 或 $4<x\leqslant 6\}$.

2. D 【解析】$z=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}{(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}-3\mathrm{i}+\sqrt{3}\mathrm{i}^2}{1-3\mathrm{i}^2}=\frac{-4\mathrm{i}}{4}=-\mathrm{i}$，$|z|=1$.

3. A 【解析】$f(2)=0$，$f'(x)=2x\ln(x-1)+\frac{x^2}{x-1}$，所以 $f'(2)=2x\ln(x-1)+\frac{x^2}{x-1}=4$，所以在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y-0=4(x-2)\Rightarrow y=4x-8$.

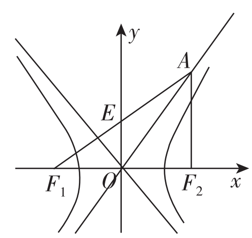
4. C 【解析】日期为解释变量，日均温度为预报变量有负相关的关系，所以①对，由折线图既不能预测本月的日均温度，也不预测第 16 日的日均温度，故②③错误，这 15 天日均温度最高为 30 度，最低为 14 度，故极差为 16 度，所以④正确，综上①④正确.

5. B 【解析】$a=\log_{0.2}0.3>0$，$b=\log_2 0.3<\log_2 0.5=-1$，$c=\log_{0.3}2>\log_{0.3}\frac{1}{0.3}=\log_{0.3}\frac{10}{3}=-1$.

6. D 【解析】至少要用 8 根小木根的对立事件为用掉 5 根，6 根，7 根这三种情况，用 5 根小木棍为 126 这一种情况的全排列，6 根有 123，127，163，167 这四种情况的全排列，7 根有 124，128，164，168，137，267，263 这七种情况的全排列，故至少要用 8 根小木根的概率为 $1-\frac{12A_3^3}{A_9^3}=\frac{6}{7}$.

7. B 【解析】当且仅当 $n=8$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最大值，所以 $a_9<0$，故 $S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9<0$，$S_{16}=\frac{17(a_1+a_{16})}{2}=\frac{17(a_8+a_9)}{2}>0$，所以满足 $S_n\cdot S_{n+1}<0$ 的正整数 n 的值为 16.

8. A 【解析】由 E 为 F_1 与 A 的中点，得 $A(c,\frac{bc}{a})$，故 l 的斜率为 $\frac{\frac{bc}{a}}{2c}=\frac{a}{b}$，解得 $b^2=2a^2$，所以离心率为 $\sqrt{3}$.

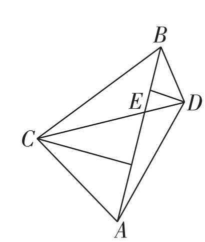


9. C 【解析】由框图可知，$y_1=x^2+1$，$y_2=(x^2+1)x^2+1=x^4+x^2+1$，$y_3=(x^4+x^2+1)x^2+1=x^6+x^4+x^2+1$，输出的为 $y=x^6+x^4+x^2+1=\frac{1-(x^2)^4}{1-x^2}=\frac{85}{64}$.

10. A 【解析】由图得 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，$f(\frac{3\pi}{8})=\sin(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3})=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

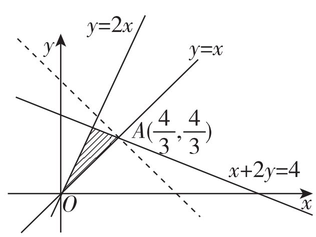
11. D 【解析】由 $f(x-1)$ 为奇函数，可知函数 $f(x)$ 有一个对称中心为 $(-1,0)$，由 $f(x+1)$ 为偶函数，可知 $f(x)$ 关于 $x=1$ 轴对称，所以函数 $f(x)$ 的周期为 8，则 $x=5$ 是一条对称轴，所以 $f(2\pi)=f(10-2\pi)$，$f(0)=f(2)$，且 $1<\frac{\pi}{2}<2<10-2\pi<5$，又函数 $f(x)$ 在 $[1,5]$ 上为增函数，所以 $f(\frac{\pi}{2})<f(0)<f(2\pi)$.

12. D 【解析】如图，连接 CD 交 AB 于点 E，由 $S_1=3S_2$，得 $CE=3ED$，$\overrightarrow{EC}=-3\overrightarrow{ED}$，设 $x=(a_n-\frac{4}{3}a_{n-1})$，$y=(a_{n+1}-2a_n)$，$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AE}$，$\lambda\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}=x\overrightarrow{AC}+$



$y\,\overrightarrow{AD}=x(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC})+y(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})=(x+y)\overrightarrow{AE}+x\,\overrightarrow{EC}+y\,\overrightarrow{ED}$，$[\lambda-(x+y)]\overrightarrow{AE}=(-3x+y)\overrightarrow{ED}$，又$\overrightarrow{AE}$与$\overrightarrow{ED}$不共线，所以$-3x+y=0\Rightarrow\frac{y}{x}=3$，即$\frac{a_{n+1}-2a_n}{a_n-\frac{4}{3}a_{n-1}}=3$，由$\frac{a_{n+1}-2a_n}{a_n-\frac{4}{3}a_{n-1}}=3\Rightarrow a_{n+1}-2a_n=3a_n-4a_{n-1}\Rightarrow a_{n+1}-a_n=4(a_n-a_{n-1})\Rightarrow\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=4$，$n\geqslant2$，所以$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 2 为首项，4 为公比的等比数列，所以 $a_{n+1}-a_n=2\cdot4^{n-1}$，所以 $a_n-a_{n-1}=2\cdot4^{n-2}$，$\cdots$，$a_2-a_1=2\cdot4^0$，累加得 $a_n=\frac{2\cdot4^{n-1}+1}{3}$，故 A，B 错误，$T_n=\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}(4^0+4^1+\cdots+4^{n-1})=\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}\cdot\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{2^{2n+1}+3n-2}{9}$.

13. $\frac{8}{3}$ 【解析】可行域为图中阴影部分，$z=x+y$ 在点 $A(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$处最大，最大为$\frac{8}{3}$.



14. 2 【解析】$C_5^2(x^2)^2(-\frac{a}{x})^3=-10a^3x=-80x$，所以 $a=2$.

15. $\frac{5}{2}$ 【解析】直线 $x-my+m-1=0$ 恒过点$(1,1)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$\begin{cases}x-my+m-1=0\\y^2=2x\end{cases}$消去 x 并化简整理得 $y^2-2my+2m-2=0$，得$\begin{cases}y_1+y_2=2m\\y_1y_2=2m-2\end{cases}$，$|AF|+|BF|=x_1+x_2+1=\frac{y_1^2}{2}+\frac{y_2^2}{2}+1=\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{2}+1=\frac{4m^2-4m+4}{2}+1=2m^2-2m+3$，故当 $m=\frac{1}{2}$时，$|AF|+|BF|$最小，最小值为$\frac{5}{2}$.

16. 9π 【解析】$PA\perp$平面 ABC，所以 $PA\perp BC$，又 $AB\perp BC$，所以 $BC\perp$平面 PAB，故 $BC\perp AE$，又 $PA=AB$，故 $AE\perp PB$，所以 $AE\perp$平面 PBC，所以 $AE\perp EF$，$AE\perp PE$，$EF\parallel BC$，所以 $EF\perp PE$，故 EF，PE，AE 两两垂直，又 $EF=\frac{1}{2}BC=1$，$PE=AE=2$，所以三棱锥 $P-AEF$ 的外接球的半径为$\frac{\sqrt{1+4+4}}{2}=\frac{3}{2}$，故表面积为 $4\pi(\frac{3}{2})^2=9\pi$.

17.【解析】(1)$a^2+c^2=b^2+2ac\sin C$，

所以$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\sin C$，

由余弦定理得 $\cos B=\sin C$，………………… 2 分

所以 $C=\frac{\pi}{2}-B$，或 $C=\frac{\pi}{2}+B$，

由正弦定理，$c=2a\cos B\Rightarrow\sin C=2\sin A\cos B$，

又 $\cos B=\sin C$，故 $\sin A=\frac{1}{2}$， ……………… 4 分

$A=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$，与 $C=\frac{\pi}{2}-B$ 矛盾，故 $C=\frac{\pi}{2}+B$，

所以 C 为钝角，故 $A=\frac{\pi}{6}$. ………………… 6 分

(2)又 $A+B+C=\pi$，$A=\frac{\pi}{6}$，$C=\frac{\pi}{2}+B$，

解得 $B=\frac{\pi}{6}$，$C=\frac{2\pi}{3}$，……………………… 8 分

设 $CD=x$，则 $CB=2x$，

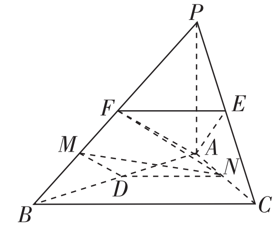
由余弦定理得 $BD^2=CD^2+CB^2-2CD\cdot CB\cos C$，

所以 $14=x^2+4x^2+2x^2=7x^2$，

解得 $x=\sqrt{2}$，所以 $b=a=2\sqrt{2}$，…………… 10 分

所以$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. ………………………… 12 分

18.【解析】(1)设点 D 为 AB 的中点，连接 DN，DM，故 $DN\parallel BC$，$DM\parallel AF$，



因为 E，F 分别为边 PC，PB 的中点，

所以 $EF\parallel BC$，故 $DN\parallel EF$， ……………… 2 分

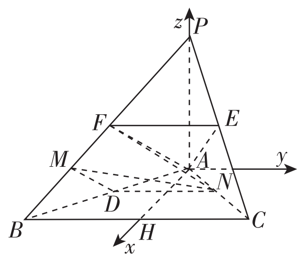
综上，$DN\parallel EF$，$DM\parallel AF$，所以平面 $MND\parallel$平面 AFE，

又 $MN\subset$平面 MND，所以 $MN\parallel$平面 AEF. ………………………………………… 4 分

(2)设 BC 的中点为 H，由$\triangle ABC$ 为等边三角形

可知 $AH\perp BC$，又 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp AH$，$PA\perp BC$，如图以 A 为坐标原点，过 A 做 BC 的平行线为 y 轴的方向，以 AP 为 z 轴正方向，以 AH 为 x 轴的正方向建立空间直角坐标系 $A-xyz$. ………………………………… 5 分

设 $PA=AB=2$，所以 $AH=\sqrt{3}$，



则 $P(0,0,2)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，

所以 $F(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},1)$，$M(\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{1}{2})$，

$N(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，

故 $\overrightarrow{NM}=(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{5}{4},\frac{1}{2})$，…………………… 7 分

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 ANF 的法向量，则有

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AN}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1+z_1=0\end{cases}$，可取 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3})$，………………………………… 9 分

设直线 MN 与平面 AFN 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{NM}\rangle|=|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NM}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{NM}|}|=\frac{\sqrt{42}}{14}$

所以直线 MN 与平面 AFN 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$. ……………………………………… 12 分

19.【解析】(1) 设 $P(m,n)$，由 $|F_1F_2|=2$，得 $c=1$，

又 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$，$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times2\times n=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以 $n=\frac{\sqrt{15}}{3}$，

又 $\tan\angle PF_1F_2=\frac{\sqrt{15}}{7}$，故 $\frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{m+1}=\frac{\sqrt{15}}{7}$，得 $m=\frac{4}{3}$，

故 $\frac{16}{9a^2}+\frac{15}{9b^2}=1$，又 $a^2-b^2=1$，

解得 $b^2=3$ 或 $b^2=-\frac{5}{9}$(舍去)$a^2=4$，

故椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………… 6 分

(2) 设直线 l 的方程设为 $x=my+1$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$

则有 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$，…… 8 分

又 $\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，所以 $-y_1=2y_2$，

故 $\begin{cases}-y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}\\ -2y_2^2=\frac{-9}{3m^2+4}\end{cases}$ 解得 $m^2=\frac{4}{5}$，………… 10 分

$|AB|=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}=\sqrt{(1+m^2)[(\frac{-6m}{3m^2+4})^2-4\times\frac{-9}{3m^2+4}]}=\frac{27}{8}$. ……………………………………………… 12 分

20.【解析】(1) 若 $a=0$，则 $f(x)=-\frac{\sin x}{2+\cos x}$，

$f'(x)=-\frac{(2+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$

$=-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$. ……………………………… 2 分

当 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos x>-\frac{1}{2}$，即 $f'(x)<0$；

当 $2k\pi+\frac{2\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{4\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\cos x<-\frac{1}{2}$，即 $f'(x)>0$.

因此 $f(x)$ 在每一个区间 $(2k\pi-\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{2\pi}{3})$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上是减函数，

在每一个区间 $(2k\pi+\frac{2\pi}{3},2k\pi+\frac{4\pi}{3})$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上是增函数. ……………………………………………… 4 分

(2) $f'(x)=a-\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}=a-\frac{2}{2+\cos x}+\frac{3}{(2+\cos x)^2}=3(\frac{1}{2+\cos x}-\frac{1}{3})^2+a-\frac{1}{3}$.

故当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时，$f'(x)\geqslant0$.

又 $f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$. …… 8 分

当 $a\leqslant0$ 时，有 $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\times a-\frac{1}{2}<0$，与条件矛

盾. ………………………………………… 10 分

当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时,令 $g(x)=\sin x-3ax$,

则 $g'(x)=\cos x-3a$,

又 $3a<1$,故 $g'(x)=\cos x-3a=0$,在区间 $(0,+\infty)$ 上有无穷多个零点,设最小的零点为 x_1,

则当 $x\in(0,x_1)$ 时,$g'(x)>0$.

因此 $g(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递增.

故当 $x\in(0,x_1)$ 时,$g(x)>g(0)=0$,

所以 $\sin x>3ax$.

于是,当 $x\in(0,x_1)$ 时,$\frac{\sin x}{2+\cos x}>\frac{\sin x}{3}>ax$,

得 $ax-\frac{\sin x}{2+\cos x}<0$ 与条件矛盾.

故实数 a 的取值范围是 $[\frac{1}{3},+\infty)$. ……… 12 分

21.【解析】(1)由正态分布可知,抽取的一片瓷砖的重量在 $(\mu-3\sigma,\mu-3\sigma)$ 之内的概率为 0.9974,则这 10 片瓷砖重量全在 $(\mu-3\sigma,\mu-3\sigma)$ 内的概率为 $0.9974^{10}\approx0.9743$;

则这 10 片中至少有 1 件为废品的概率为 $1-0.9743=0.0257$. ……………………………… 3 分

(2)(ⅰ)由利润率和投额可得 X_1 可为 1.2 万元、0.8 万元、0.2 万元,X_2 可为 1 万元、0.5 万元、0.2 万元,由直方图可得对应的频率为 0.3、0.5、0.2 和 0.2、0.8、0,

所以随机变量 X_1 的分布列为

X_1(万元)	1.2	0.8	0.2
P	0.3	0.5	0.2

$E(X_1)=1.2\times0.3+0.8\times0.5+0.2\times0.2=0.8$(万元),

$D(X_1)=(1.2-0.8)^2\times0.3+(0.8-0.8)^2\times0.5+(0.2-0.8)^2\times0.2=0.12$, ………………… 6 分

随机变量 X_2 的分布列为

X_2(万元)	1	0.5	0.2
P	0.2	0.8	0

$E(X_2)=1\times0.2+0.5\times0.8+0.2\times0=0.6$(万元),

$D(X_2)=(1-0.6)^2\times0.2+(0.5-0.6)^2\times0.8=0.04$,

经销商经销甲种瓷砖的平均利润 0.8 万元大于经销乙种瓷砖的平均利润 0.6 万元,但经销甲种瓷砖的方差 0.12 也远大于经销乙种瓷砖的方差 0.04.

所以经销甲种瓷砖平均利润大,相对不稳定,而经销乙种瓷砖平均利润小,但相对稳定. …… 9 分

(ⅱ)设经销商在经销甲种瓷砖上投资了 x 万元,则在经销乙种瓷砖上投资了 $10-x$ 万元,$f(x)$ 为经销甲种瓷砖的方差与经销乙种瓷砖的方差的和,

$f(x)=D(\frac{x}{10}X_1)+D(\frac{10-x}{10}X_2)$

$=(\frac{x}{10})^2D(X_1)+(\frac{10-x}{10})^2D(X_2)$

$=\frac{0.04}{100}(3x^2+(10-x)^2)$

$=\frac{0.04}{100}(4x^2-20x+100)$

当 $x=-\frac{-20}{2\times4}=2.5$ 时,$f(x)$ 值最小.

故在经销甲种瓷砖上投资 2.5 万元,在经销乙种瓷砖上投资 7.5 万元,可使得投资所获利润的方差和最小. ……………………………… 12 分

22.【解析】(1)由 $\begin{cases}x=t^2+\frac{1}{t^2}-2\\y=2t-\frac{2}{t}\end{cases}$,$y^2=4(t^2+\frac{1}{t^2}-2)$,

$x=t^2+\frac{1}{t^2}-2$,消去 t 得 $y^2=4x$,

由 $\begin{cases}x=2+\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$,得 $\begin{cases}\cos\alpha=x-2\\\sin\alpha=y\end{cases}$,两式平方相加得 $(x-2)^2+y^2=1$, ……………………………… 3 分

又 $\rho^2=x^2+y^2$,$x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$,

曲线 C_1 的极坐标方程为 $(\rho\sin\theta)^2=4\rho\cos\theta\Rightarrow\rho=\frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}$,

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+3=0$, ……………………………………………………… 5 分

(2)设 $A(\rho_1,\frac{\pi}{6})$,$B(\rho_2,\frac{\pi}{6})$,

由(1)$\rho_1=\frac{4\cos\frac{\pi}{6}}{\sin^2\frac{\pi}{6}}=8\sqrt{3}$,

$\rho_2^2-2\sqrt{3}\rho_2+3=(\rho_2-\sqrt{3})^2=0$ 得 $\rho_2=\sqrt{3}$, ……………………………………………………… 8 分

$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=|8\sqrt{3}-\sqrt{3}|=7\sqrt{3}$. …… 10 分

23.【解析】(1)当 $m\geqslant-1$ 时,

由 $f(x)=|2x+2|+|x-m|$

$$=\begin{cases}3x+2-m, x\geqslant m\\ x+2+m, -1<x<m.\\ -3x-2+m, x\leqslant -1\end{cases}$$

所以当 $x=-1$ 时，函数最小值为 2，即 $1+m=2$，解得 $m=1$， …………………………………… 2 分

当 $m<-1$ 时，$f(x)=|2x+2|+|x-m|$

$$=\begin{cases}3x+2-m, x\geqslant -1\\ -x-2-m, m<x<-1\\ -3x-2+m, x\leqslant m\end{cases}$$

所以当 $x=-1$ 时，函数最小值为 2，即 $-1-m=2$，解得 $m=-3$， …………………………… 4 分

综上，$m=1$ 或 $m=-3$. …………………… 5 分

(2)由(1)可知 $m=1$ 或 $m=-3$，$a^2+b^2=-3$ 无实数解，所以 $a^2+b^2=1$， …………………… 6 分

$a^2+1+b^2+2=4$，

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+2}=(\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+2})\frac{(a^2+1+b^2+2)}{4}$$

…………………………………………………… 7 分

$$=\frac{2+\frac{b^2+2}{a^2+1}+\frac{a^2+1}{b^2+2}}{4}\geqslant 1.$$ …………………… 9 分

当且仅当 $a^2+1=b^2+2=2$，

即 $a^2=1,b^2=0$ 时等号成立，

所以 $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+2}$ 的最小值为 1. ………… 10 分