

数 学 试 题

黄冈市教育科学研究院命制

2021 年 7 月 3 日上午 8:00~10:00

本试题卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

第 I 卷(选择题,共 60 分)

一、单项选择题:本题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,请将答案涂在答题卡上。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 + x - 6 < 0\}$, $B = \{x | y = \lg(1-x)\}$, 则 $A \cup B =$
 A. $\{x | -3 < x < 1\}$ B. $\{x | -2 < x < 1\}$ C. $\{x | x < 2\}$ D. $\{x | x < 3\}$
2. 已知 i 是虚数单位, z 是复数, 若 $(1+2i)z = 1-3i$, 则复数 z 的模为
 A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 1
3. 已知 $a = \log_2 0.3$, $b = \log_{0.3} 0.2$, $c = 0.2^{0.3}$, 则
 A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < a < c$ D. $c < a < b$
4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(2, 3)$, 则双曲线离心率为
 A. $\frac{\sqrt{13}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{13}}{9}$
5. 已知 $f(\ln x) = x^2 + \ln x$, 则 $f'(0) =$
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 1
6. 把物体放在冷空气中冷却, 如果物体原来的温度是 $\theta_1^\circ\text{C}$, 空气的温度是 $\theta_0^\circ\text{C}$, 经过 t 分钟后物体的温度 $\theta^\circ\text{C}$ 可由公式 $\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$ 求得. 其中 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的大于 0 的常数. 现有 100°C 的物体, 放在 10°C 的空气中冷却, 5 分钟以后物体的温度是 40°C , 则 k 约等于(参考数据: $\ln 3 \approx 1.099$)
 A. 0.22 B. 0.27 C. 0.36 D. 0.55
7. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x+2) + f(x) = 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) = 2^x - 2$, 则 $f(\log_{\frac{1}{8}} 125) =$
 A. $\frac{7}{16}$ B. $-\frac{7}{16}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$
8. 若曲线 $y = xe^x - ax + 1$ 与直线 $x - y + 1 = 0$ 相切. 则实数 a 的值为
 A. e B. 0 或 -1 C. 0 D. -1

二、多项选择题:本题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 下列命题为真命题的有

- | | |
|--|--|
| A. 若 $a > b$, 则 $a^3 > b^3$ | B. 若 $a > b $, 则 $a^2 > b^2$ |
| C. 若 $ab \neq 0$ 时, $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$ | D. 若 $a > b > e$, 则 $\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$ |

10. 任何一个复数 $z=a+bi$ (其中 $a, b \in \mathbf{R}, i$ 为虚数单位) 都可以表示成 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (其中 $r \geq 0, \theta \in \mathbf{R}$) 的形式, 通常称之为复数 z 的三角形式. 法国数学家棣莫弗发现: $[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ ($n \in \mathbf{N}^*$). 我们称这个结论为棣莫弗定理. 则下列判断正确的是

A. 复数 $z=1-\sqrt{3}i$ 的三角形式为 $z=2(\cos \frac{\pi}{3}-i\sin \frac{\pi}{3})$

B. $r=1, \theta=\frac{\pi}{3}$ 时, $z^3=-1$

C. $r=1, \theta=\frac{\pi}{2}$ 时, $z+z^2+z^3+\cdots+z^{2021}=i$

D. $r=1, \theta=\frac{\pi}{4}$ 时, “ n 为偶数” 是 “ z^n 为纯虚数” 的必要不充分条件

11. 直线 $l: y=k(x-2)$ 与抛物线 $C: y^2=8x$ 交于 A, B 两点 (A 在 B 的上方), F 为抛物线的焦点, O 为坐标原点, $\triangle AFO$ 的面积是 $\triangle BFO$ 面积的 2 倍, 以 AB 为直径的圆与直线 $x=t$ ($t < 0$) 相切, 切点为 P . 则下列说法正确的是

A. $|AF|=6$

B. $\triangle AOB$ 的面积为 $12\sqrt{2}$

C. t 的值为 -2

D. $|PF|=3\sqrt{2}$

12. 对于函数 $y=f(x)$, 若存在 x_0 , 使 $f(x_0)=-f(-x_0)$, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 与点 $(-x_0, f(-x_0))$ 为函数 $f(x)$ 一对“和谐点”. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \ln x-x-2 & x>0 \\ -ax^2-2x+2 & x\leq 0 \end{cases}$, 则下列说法正确的是

A. $f(x)$ 可能有三对“和谐点”

B. 若 $a=1$, 则 $f(x)$ 有一对“和谐点”

C. 若 $0 < a < 1$, 则 $f(x)$ 有两对“和谐点”

D. 若 $a < 0$, 对 $\forall x_1 > 0$, 总 $\exists x_2 \leq 0$, 使 $f(x_1)+f(x_2)=0$

三、填空题: 本题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $f(x)=\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{\ln x}$ 的定义域为_____.

14. 已知 $x, y > 0$ 且 $x+2y=1$, 则 $\frac{1}{x}+\frac{2x}{y}$ 的最小值为_____.

15. 写出一个定义域为 $\mathbf{R}$ 值域为 $(0, 2]$ 的偶函数_____. (答案不唯一)

16. A, B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a > b > 0$) 上的两点, F_1, F_2 为其左右焦点, 且满足 $\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$, 当

$\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$ 时, 椭圆的离心率为_____.

四、解答题: 本大题共 6 个小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或验算步骤.

17. (本题满分 10 分) 已知条件 p : “方程 $\frac{x^2}{3-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆”.

条件 q : “方程 $\frac{x^2}{m-(t+2)}-\frac{y^2}{m-(t+4)}=1$ 表示双曲线”, 其中 $m, t \in \mathbf{R}$.

(1) 若条件 p 成立, 求 m 的取值范围;

(2) 若 p 是 q 的充分不必要条件, 求 t 的取值范围.

18. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = x^3 - 3x + a$, $g(x) = \sin x - x$,

(1) 求 $y = f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对 $\forall x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, f(x_1) \geq g(x_2)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

19. (本小题 12 分) 已知 $f(x) = ax^2 + (a^2 - 3)x - 3a$

(1) 若关于 x 的不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | x > 1 \text{ 或 } x < -3\}$, 求实数 a 的值;

(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) + x + a < 0$ 的解集中恰有 2 个整数, 求正整数 a 的值.

20. (本小题 12 分) 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数, 且满足 $f(x) + g(x) = e^x + x$.

(1) 求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式;

(2) 若函数 $y = g(2x) + ag(x) + 1 (a \in \mathbf{R})$ 的最小值为 -1 , 求 a 的值.

21. (本小题 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $4\sqrt{3}$, 点 $P(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点且线段 AB 的中点为 $(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\angle APB$ 的平分线交 x 轴于点 M , 求证 $PM \perp x$ 轴.

22. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbf{R})$

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1, x_2, x_1 > x_2$ 不等式 $f(x_1) < mx_2$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.