绝密★启用并使用完毕前

2022—2023学年高三上学期期中考试

数学试题

本试卷共4页，22题，全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、座号、考试号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x^2-2x\leqslant 0, x\in \mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $[-1,2]$　　C. $[0,1]$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2.已知点 O 是平面内任意一点，则“存在 $t\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{OC}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$”是“$A$，$B$，$C$ 三点共线”的

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分又不必要条件

3.已知等比数列 $\{a_n\}$，$a_3a_{10}a_{17}=8$，则 $a_{10}=$

A.1　　B.2　　C.4　　D.8

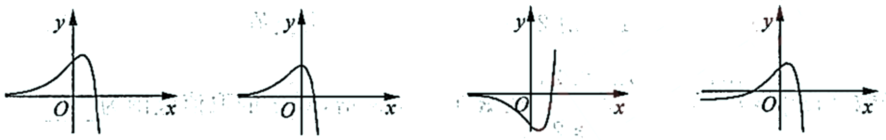
4.三角形的三边分别为 a，b，c，秦九韶公式 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$ 和海伦公式 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$（$p=\frac{a+b+c}{2}$）是等价的，都是用来求三角形的面积.印度数学家婆罗摩笈多在公元7世纪的一部论及天文的著作中，给出若四边形的四边分别为 a,b,c,d，则 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\theta}$（$p=\frac{a+b+c+d}{2}$，$\theta$ 为一组对角和的一半）.已知四边形四条边长分别为3，4，5，6，则四边形最大面积为

A. 21　　B. $4\sqrt{10}$　　C. $10\sqrt{5}$　　D. $6\sqrt{10}$

5.已知 θ 为第三象限角，$\sin\theta-\cos\theta=-\frac{1}{5}$，则 $\frac{\cos\theta(1-2\sin^2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$

A. $-\frac{4}{25}$　　B. $-\frac{3}{25}$　　C. $\frac{3}{25}$　　D. $\frac{4}{25}$

6.函数 $f(x)=-e^{3x}+2e^{2x}$ 的图象大致为



A　　B　　C　　D

7.在 $\triangle ABC$ 中,内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $b=6$，$c=4$，点 O 为外心，则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=$

A. -20　　B. -10　　C. 10　　D. 20

8.设方程 $e^x+x+e=0$ 和 $\ln x+x+e=0$ 的根分别为 p 和 q，函数 $f(x)=e^x+(p+q)x$，则

A. $f(\frac{4}{3})<f(\frac{2}{3})<f(0)$　　B. $f(\frac{2}{3})<f(\frac{4}{3})<f(0)$

C. $f(\frac{2}{3})<f(0)<f(\frac{4}{3})$　　D. $f(0)<f(\frac{2}{3})<f(\frac{4}{3})$

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9.方程 $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上有解，则解可能为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{7\pi}{6}$　　D. $\frac{5\pi}{3}$

10.已知等差数列 $\{a_n\}$，前 n 项和为 S_n，$a_1>0$，$\frac{a_{2023}}{a_{2022}}<-1$，则下列结论正确的是

A. $a_{2022}>0$　　B. S_n 的最大值为 S_{2023}

C. $|a_n|$ 的最小值为 a_{2022}　　D. $S_{4044}<0$

11.已知 $a>0$，$b>0$，$2a+b=1$，则下列不等式一定成立的是

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 9$　　B. $ab\leqslant\frac{1}{8}$

C. $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{5}$　　D. $\sqrt{2a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

12.在 $\triangle ABC$ 中,内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $\tan(A+B)(1-\tan A\tan B)=\frac{\sqrt{3}c}{a\cos B}$，则下列结论正确的是

A. $A=\frac{\pi}{6}$

B.若 $b-c=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，则 $\triangle ABC$ 为直角三角形

C.若 $\triangle ABC$ 面积为 1，则三条高乘积平方的最大值为 $3\sqrt{3}$

D.若 D 为边 BC 上一点，且 $AD=1$，$BD:DC=2c:b$，则 $2b+c$ 的最小值为 $\frac{9\sqrt{7}}{7}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.已知 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，$\boldsymbol{b}=(0,1)$，则 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为________.

14.已知函数 $f(x)=\begin{cases}3ax-8, x<2,\\ a^x, \quad x\geqslant 2\end{cases}$ 在R上单调递增，则 a 的取值范围为________.

15.已知 $f(x)$ 是定义域为R的奇函数，$f(x-2)+1$ 为奇函数，则 $\sum\limits_{i=1}^{16}f(i)=$________.

16.若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，则称数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列.如果 $f(x)=x^2-5x+6$，数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列，设 $a_n=\log_2\dfrac{x_n-2}{x_n-3}$，且 $a_1=1$，则 $x_2=$________(2分)；数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2023}=$________(3分).

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10分)

已知函数 $f(x)=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)将 $y=f(x)$ 的图象先向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，再将图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{2}$ 倍(纵坐标不变)，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 的对称轴.

18.(12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，其前 n 项和为 S_n，且有 $a_1=b_1=1$，$a_2=b_2+1$，$a_4=S_3$.

(1)求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $c_n=\begin{cases}a_n, \text{当} n \text{为奇数时},\\ b_n, \text{当} n \text{为偶数时},\end{cases}$ 求数列 $\{c_n\}$ 的前11项和 T_{11}.

19.(12分)

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $2(a\cos B-b\cos A)=c$.

(1)证明：$\tan A=3\tan B$；

(2)若 $a^2-b^2=bc$，求 B.

20.(12 分)

已知三次函数 $f(x)=\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}(2a-1)x^2-2x-\frac{1}{2}$.

(1)当 $a=3$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

(2)讨论 $y=f(x)$ 的单调性.

21.(12 分)

设正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,且 $na_{n+1}^2-(n+1)a_n^2=n^2+n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)证明:数列 $\left\{\frac{a_n^2}{n}\right\}$ 是等差数列,并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $b_n=\frac{1}{2\sqrt{a_n^3}}$,求证:数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n<\frac{3}{2}$.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln x-x+\frac{1}{x}$.

(1)若 $\forall x\geqslant 1$, $f(x)\leqslant 0$ 恒成立,求 a 的取值范围;

(2)证明:对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)}}>n+1$;

(3)讨论函数 $f(x)$ 零点的个数.

绝密★启用并使用完毕前

2022—2023学年高三上学期期中考试

数学试题参考答案 2022.11

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	D	B	A	C	B

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

题号	9	10	11	12
答案	AC	ACD	BCD	CD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. $-\frac{3}{5}$　　14. $(1,2]\cup[4,+\infty)$　　15. 68　　16. $\frac{10}{3}$，$2^{2023}-1$

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10分）

解析：（1）$f(x)=1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$ ……………… 2分

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$ ……………… 4分

所以$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ ……………… 5分

（2）将$y=f(x)$向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到$y=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})+1$ ……………… 6分

再将图象上所有点的横坐标缩短到原来$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），

得到$y=2\sin(4x-\frac{\pi}{6})+1$，所以$g(x)=2\sin(4x-\frac{\pi}{6})+1$ ……………… 7分

由$4x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

所以$g(x)$对称轴为$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ ……………… 10分

18.（12分）

解析：（1）设数列$\{a_n\}$的公差为d，数列$\{b_n\}$的公比为$q\,(q\neq 0)$，

由题意可得$\begin{cases} a_1+d=b_1q+1, \\ a_1+3d=b_1(1+q+q^2), \end{cases}$ ························ 2 分

即为$\begin{cases} d=q, \\ q^2+q=3d, \end{cases}$

所以$q^2-2q=q(q-2)=0$，

因为$q\neq 0$，所以$q=d=2$， ························ 4 分

所以$a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$． ························ 6 分

（2）由（1）可得$c_n=\begin{cases} 2n-1, & \text{当}n\text{为奇数时}, \\ 2^{n-1}, & \text{当}n\text{为偶数时}. \end{cases}$

所以数列$\{c_n\}$的奇数项是以1为首项，4 为公差的等差数列，

数列$\{c_n\}$的偶数项是以2 为首项，4 为公比的等比数列，························ 8 分

且$\{c_n\}$前 11 项中有 6 项奇数项，5 项偶数项，

所以$T_{11}=6\times1+\dfrac{6(6-1)}{2}\times4+\dfrac{2(1-4^5)}{1-4}$ ························ 10 分

$=\dfrac{2^{11}+196}{3}=748$． ························ 12 分

19．（12 分）

解析：（1）法 1：

由$2(a\cos B-b\cos A)=c$，

得$2(\sin A\cos B-\sin B\cos A)=\sin C$ ， ························ 1 分

因为$A+B+C=\pi$，

所以$\sin C=\sin(A+B)$，

则$2(\sin A\cos B-\sin B\cos A)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$， ························ 3 分

所以$\sin A\cos B=3\sin B\cos A$， ························ 4 分

因为$\triangle ABC$中A和B都不能为$\dfrac{\pi}{2}$，

所以$\dfrac{\sin A}{\cos A}=3\dfrac{\sin B}{\cos B}$， ························ 5 分

所以$\tan A=3\tan B$ ························ 6 分

法 2：

由射影定理$a\cos B+b\cos A=c$，代入，

得$2(a\cos B-b\cos A)=a\cos B+b\cos A$ ························ 1 分

即$a\cos B=3b\cos A$ ························ 3 分

所以$\sin A\cos B=3\sin B\cos A$， ························ 4 分

因为$\triangle ABC$中A和B都不能为$\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{\sin A}{\cos A}=3\frac{\sin B}{\cos B}$， ……………………………………………………5 分

所以 $\tan A=3\tan B$ ……………………………………………………………6 分

（2）法 1：

由 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$， 代入 $2(a\cos B-b\cos A)=c$

得 $2(a^2-b^2)=c^2$， ……………………………………………………………7 分

因为 $a^2-b^2=bc$，所以 $2bc=c^2$，即 $2b=c$， …………………………………9 分

代入 $a^2-b^2=bc$ 或 $2(a^2-b^2)=c^2$，

得 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}c$， …………………………………………………………………10 分

由余弦定理， $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2+c^2-(\frac{1}{2}c)^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}c\cdot c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $B=\frac{\pi}{6}$ ……………………………………………………………………12 分

法 2：

由 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$， 代入 $2(a\cos B-b\cos A)=c$

得 $2(a^2-b^2)=c^2$， ……………………………………………………………7 分

因为 $a^2-b^2=bc$，所以 $2bc=c^2$，

即 $2b=c$，即 $2\sin B=\sin C$ ………………………………………………………9 分

由（1）知， $\sin A\cos B=3\sin B\cos A$，

而 $2\sin B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，上式代入，

得 $2\sin B=4\sin B\cos A$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$， ……………………………………………10 分

由 $\tan A=3\tan B$ 知， $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $B=\frac{\pi}{6}$ ……………………………………………………………………12 分

法 3：

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，代入 $a^2-b^2=bc$，

得 $c^2-2bc\cos A=bc$， ……………………………………………………………7 分

所以 $c-2b\cos A=b$，

所以 $\sin C-2\sin B\cos A=\sin B$， ………………………………………………8 分

即 $\sin(A+B)-2\sin B\cos A=\sin B$，

即 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin B$，

即 $\sin(A-B)=\sin B$，……………………………………………………………… 9 分

所以 $A=2B$ 或 $A-B=\pi-B$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=2B$ ……………………………………………………… 10 分

代入 $\tan A=3\tan B$， $\tan A=\tan 2B=\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}=3\tan B$，

因为 $\tan B\neq 0$，所以 $\tan^2 B=\dfrac{1}{3}$，

因为 $\tan A$ ，$\tan B$ 同号，所以 $\tan B>0$，

所以 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $B\in(0，\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$ ……………………………………………………12 分

法 4：

由 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$， $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，代入 $2(a\cos B-b\cos A)=c$

得 $a^2-b^2=\dfrac{1}{2}c^2$，………………………………………………………………… 7 分

因为 $2(a\cos B-b\cos A)=c$，

所以 $a^2-b^2=\dfrac{1}{2}c^2=c(a\cos B-b\cos A)=bc$ ，……………………………………8 分

所以 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin B$

即 $\sin(A-B)=\sin B$，……………………………………………………………… 9 分

所以 $A=2B$ 或 $A-B=\pi-B$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=2B$ ……………………………………………………… 10 分

代入 $\tan A=3\tan B$， $\tan A=\tan 2B=\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}=3\tan B$，

因为 $\tan B\neq 0$，所以 $\tan^2 B=\dfrac{1}{3}$，

因为 $\tan A$ ，$\tan B$ 同号，所以 $\tan B>0$，

所以 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $B\in(0，\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$ ……………………………………………………12 分

20. （12 分）

解析：（1）由题意知 当 $a=3$ 时，$f(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-2x-\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=3x^2+5x-2$，

$f'(1)=3\times1^2+5\times1-2=6$，……………………………………………………… 2 分

$f(1)=1^3+\frac{5}{2}\times 1^2-2\times 1-\frac{1}{2}=1$，

所以切线方程为 $y-1=6(x-1)$，即 $y=6x-5$ ……………………………………4 分

（2）$f'(x)=ax^2+(2a-1)x-2=(x+2)(ax-1)\quad (a\neq 0)$ ……………………………6 分

①当 $a>0$ 时，

$f'(x)>0$ 得 $x<-2或x>\frac{1}{a}$；$f'(x)<0$ 得 $-2<x<\frac{1}{a}$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2),(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,\frac{1}{a})$ 上单调递减.

当 $a<0$ 时，

②当 $-2=\frac{1}{a}$，即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，

$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减.

③当 $-2<\frac{1}{a}$，即 $a<-\frac{1}{2}$ 时，

$f'(x)<0$ 得 $x<-2或x>\frac{1}{a}$；$f'(x)>0$ 得 $-2<x<\frac{1}{a}$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2),(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减，在 $(-2,\frac{1}{a})$ 上单调递增.

④当 $-2>\frac{1}{a}$，即 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，

$f'(x)<0$ 得 $x<\frac{1}{a}或x>-2$；$f'(x)>0$ 得 $\frac{1}{a}<x<-2$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{a}),(-2,+\infty)$ 上单调递减，

在 $(\frac{1}{a},-2)$ 上单调递增. ……………………………………………………10 分

综上：$a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-2),(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，在 $(-2,\frac{1}{a})$ 上单调递减.

$a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减.

$a<-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-2),(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减，在 $(-2,\frac{1}{a})$ 上单调递增.

$-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{a}),(-2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{a},-2)$ 上单调递增……12 分

21．（12 分）

解析：（1）因为 $na_{n+1}^2-(n+1)a_n^2=n^2+n(n\in\mathbf{N}^*)$，两端同除 $n(n+1)$

可得：$\frac{a_{n+1}^2}{n+1}-\frac{a_n^2}{n}=1$，……………………………………………… 3 分

又 $a_1=1$，所以 $\left\{\frac{a_n^2}{n}\right\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列……………………………4 分

所以 $\frac{a_n^2}{n}=n$，

因为数列 $\{a_n\}$ 是正项数列，所以 $a_n=n$．……………………………………………5 分

（2）$b_n=\frac{1}{2n\sqrt{n}}$，……………………………………………………………6 分

当 $n=1$ 时，$S_1=b_1=\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$，……………………………………………………7 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=\frac{1}{2\sqrt{a_n^3}}=\frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})}<\frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}$，

所以 $b_n<\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$，……………………………………9 分

$S_n<\frac{1}{2}+(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+\cdots+(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}})=\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{3}{2}$

综上，$S_n<\frac{3}{2}$…………………………………………………………………12 分

22．（12 分）

解析：（1）$f'(x)=\frac{a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}$，$f(1)=0$

（i）当 $a\leqslant 0$ 时，

$\forall x\geqslant 1$, $f'(x)=\frac{a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}\leqslant 0$，

函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减，所以 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立；

（ii）当 $0<a\leqslant 2$ 时，

$\Delta\leqslant 0$，$f'(x)=\frac{a}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+ax-1}{x^2}\leqslant 0$，

函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减，所以 $f(x)\leqslant 0$ 恒成立；

（iii）当 $a>2$ 时，

$-x^2+ax-1=0$ 有两根 x_1，x_2 且 $x_1x_2=1$．

不妨设 $x_1<1<x_2$，则函数 $f(x)$ 在 $(1,x_2)$ 单调增，

这与 $f(x)\leqslant 0$ 矛盾，所以不成立，

综上可得 $a\leqslant 2$．…………………………………………………………………4 分

（2）由（1）可知 $\forall x>1$, $\ln x<\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$，

令 $x=1+\frac{1}{k}$，$k\in\mathbf{N}^*$，

则 $\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{2}(\frac{k+1}{k}-\frac{k}{k+1})=\frac{1}{2}(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})$

令 $k=1,2,3,\cdots,n$ 得

$\ln(1+1)<\frac{1}{2}(\frac{1}{1}+\frac{1}{2})$，

$\ln(1+\frac{1}{2})<\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$，...

$\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$，

对以上各式累加可得：

$\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{2}+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})+\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}$

$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)}$

即对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)}}>n+1$． ……………………………………………8 分

（3）由（1）知，当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，且 $f(1)=0$，

所以只有一个零点，

当 $a>2$ 时，

$f(x)$ 在 $(0,\ x_1)$ 单调递减，$f(x)$ 在 $(x_1,\ 1)$ 单调递增，

又因为 $f(1)=0$，所以 $f(x_1)<0$．

因为 $x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}=\frac{2}{a+\sqrt{a^2-4}}>\frac{1}{a}$，

$\frac{1}{2a^2}<\frac{1}{a}$，$f(\frac{1}{2a^2})=a(\ln\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2a^3}+2a)$，

令 $g(a)=\ln\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2a^3}+2a$，则 $g'(a)=\frac{12(a^4-a^3)+1}{6a^4}>0$，

$g(2)=\ln\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+4>0$，

当 $a>2$ 时，$f(\frac{1}{2a^2})=a(\ln\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2a^3}+2a)>0$，

$\exists\alpha\in(\frac{1}{2a^2},x_1)$，$f(\alpha)=0$，

又 $f(x)=-f(\frac{1}{x})$，所以 $\exists\frac{1}{\alpha}\in(1,2a^2)$，$f(\frac{1}{\alpha})=0$，

此时有 3 个零点.

综上，当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 只有一个零点，

当 $a>2$ 时，$f(x)$ 有 3 个零点. …………………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。