

2023 学年第一学期高二年级 10 月四校联考

数学学科 试题卷

命题人：浦江中学

考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟；
 2. 答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场、座位号及准考证号（填涂）；
 3. 所有答案必须写在答题卷上，写在试卷上无效；
- 一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求。

1. 直线 $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ 的斜率与 y 轴上的截距分别为 ()
A. $\sqrt{3}, 1$ B. $-\sqrt{3}, 1$ C. $\sqrt{3}, -1$ D. $-\sqrt{3}, -1$
2. 如果一个复数的实部与虚部相等，则称这个复数为“等部复数”，若复数 $z = (2 - ai)i$ 为“等部复数”，则实数 a 的值为 ()
A. -1 B. 1 C. 2 D. -2
3. 平面 α, β 互相平行的一个充分条件是 ()
A. α, β 都垂直于同一平面 B. 某一直线与 α, β 所成角相等
C. α, β 都平行于同一直线 D. α, β 都垂直于同一直线
4. 已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = \frac{1}{2}AA_1$ ，那么异面直线 B_1C 与 A_1B 所成角的余弦值为 ()
A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$
5. 设非零向量 \vec{a} 和 \vec{b} 的夹角为 θ ，定义运算： $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ 。已知 $\vec{a} = (1, 1), \vec{b} = (-1, 2)$ ，则 $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ ()
A. 2 B. $\sqrt{7}$ C. 3 D. $\sqrt{10}$
6. 点 $P(x, y)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上运动，则 $|4x - 3y + 4|$ 的取值范围 ()
A. $[0, 1]$ B. $[0, 9]$ C. $[1, 8]$ D. $[1, 9]$
7. 在 $\triangle ABC$ 中， $A(-1, 0), B(0, 1)$ ，点 C 在直线 $y = x$ 上运动，则 $\triangle ABC$ 内切圆的半径的最大值是 ()
A. $3 - 2\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ C. $\sqrt{2} - 1$ D. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

8. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB=AD=BD=2\sqrt{3}$, $\angle BDC=150^\circ$, $CD=2$, 二面角 $A-BD-C$ 的大小为 60° , 则该三棱锥外接球半径是 ()

- A. $3\sqrt{3}$ B. $\sqrt{29}$ C. $\sqrt{31}$ D. $\sqrt{33}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知实数 $a > b, c > 0$, 那么 ()

- A. $a^2 > b^2$ B. $e^a > e^b$ C. $ac > bc$ D. $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$

10. 已知圆台的上底半径为 1, 下底半径为 3, 球 O 与圆台的两个底面和侧面都相切, 则 ()

- A. 圆台的母线长为 4 B. 圆台的高为 4
C. 圆台的表面积为 26π D. 球 O 的表面积为 12π

11. 分别抛掷两枚质地均匀的硬币, 设事件 A = “第一枚正面朝上”, 事件 B = “第二枚正面朝上”, 事件 C = “两枚硬币朝上的面相同”, 事件 D = “两枚硬币朝上的面不同”, 则 ()

- A. 事件 A 和 B 互斥 B. 事件 C 和 D 互斥
C. 事件 A 和 B 相互独立 D. 事件 C 和 D 相互独立

12. 过抛物线 $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}$ 上一点 P 作圆 $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$ 的两条切线, 切点为 E, F , 则 ()

- A. 使 $PE \perp PF$ 的点 P 共有 2 个 B. $|EF|$ 既有最大值又有最小值
C. 使四边形 $PECF$ 面积最小的点 P 有且只有一个 D. 直线 EF 过定点

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在空间直角坐标系中, 若 $\vec{a} = (1, 1, -\sqrt{3}), \vec{b} = (1, -1, x)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

14. 设 $\omega > 0$, 若函数 $f(x) = \cos(\omega x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有且仅有 2 个零点, 则 ω 的取值范围是 _____.

15. 直线 $l: y = x$ 与圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2 (r > 0)$ 交 A, B 两点, 若 D 为圆 C 上一点, 且 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 则 r 的值为 _____.

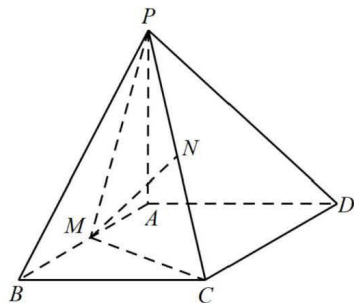
16. 若关于 x 的方程 $ax^2 - x - b = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有实数根, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 如图, 已知 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA = AB = 2$, M, N 分别为 AB, PC 的中点.

(I) 求证: $MN \perp$ 平面 PCD ;

(II) 求平面 PMC 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值.



18. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且 $\cos^2 \frac{A-B}{2} - \cos A \cos B = \frac{3}{4}$.

(I) 求角 C ;

(II) 若 $c=2$, 求 AB 边上高的最大值.

19. (12分) 已知 $g(x)$ 为过点 $(2,9)$ 的指数函数, $f(x) = \frac{m-g(x)}{1+g(x)}$ 为定义域为 \mathbf{R} 的奇函数.

(I) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(II) 若对任意的 $t \in [0,5]$, 不等式 $f(t^2 + 2t + k) + f(-2t^2 + 2t - 5) > 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

20. (12分) 文明城市是反映城市整体文明水平的综合性荣誉称号, 作为普通市民, 既是文明城市的最大受益者, 更是文明城市的主要创造者. 某市为提高市民对文明城市创建的认识, 举办了“创建文明城市”知识竞赛, 从所有答卷中随机抽取 100 份作为样本, 将样本的成绩 (满分 100 分, 成绩均为不低于 40 分的整数) 分成六段: $[40,50), [50,60), \dots, [90,100]$ 得到如图所示的频率分布直方图.

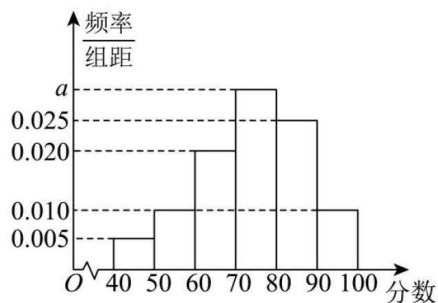
(I) 求频率分布直方图中 a 的值;

(II) 求样本成绩的第 75 百分位数;

(III) 已知落在 $[50,60)$ 的平均成绩是 56, 方差是 7,

落在 $[60,70)$ 的平均成绩为 65, 方差是 4, 求两组

成绩的总平均数 \bar{z} 和总方差 s^2 .



21. (12分) 设抛物线 $y = x^2 - 3$ 与两坐标轴的交点分别记为 M, N, G , 曲线 C 是经过这三点的圆.

(I) 求圆 C 的方程.

(II) 过 $P(-1, 0)$ 作直线 l 与圆 C 相交于 A, B 两点,

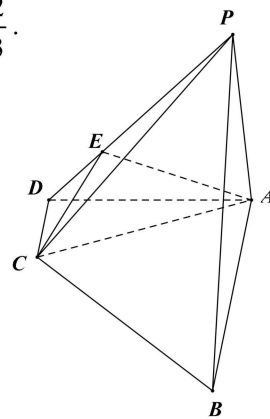
(i) 用坐标法证明: $|PA| \cdot |PB|$ 是定值.

(ii) 设 $Q(0, -2)$, 求 $|QA|^2 + |QB|^2$ 的最大值.

22. (12分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \parallel CD, \angle BAD = \angle ACB = 90^\circ, AB = \sqrt{3}AC = 3CD = 6, PA \perp BC$, 在锐角三角形 PAC 中, $PC = 4$.

(I) 点 E 满足 $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PD}$, 试确定 λ 的值, 使得直线 $PB \parallel$ 平面 ACE , 并说明理由.

(II) 当 PA 的长为何值时, 直线 AD 与平面 PBC 所成的角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

