2023年高考适应性考试（三）

数学试题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{1,2,a+3\}$，集合 $B=\{a,5\}$，若 $A\cup B=A$，则 $a=$（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

2.已知i为虚数单位，复数 $z=(1+\mathrm{i})\cdot(m-2\mathrm{i})$ 在复平面内对应的点落在第一象限，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $m>2$　　B. $0<m<2$　　C. $-2<m<2$　　D. $m<-2$

3.已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-2\vec{b}|$，且 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量为 $\frac{2}{3}\vec{a}$，则 $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C.2　　D. $\sqrt{3}$

4.为了贯彻落实《中共中央国务院关于深入打好污染防治攻坚战的意见》，某造纸企业的污染治理科研小组积极探索改良工艺，使排放的污水中含有的污染物数量逐渐减少.已知改良工艺前所排放废水中含有的污染物数量为 $2.25\mathrm{g/m^3}$，首次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量为 $2.21\mathrm{g/m^3}$，第 n 次改良工艺后排放的废水中含有的污染物数量 r_n 满足函数模型 $r_n=r_0+(r_1-r_0)\cdot 3^{0.25n+t}\left(t\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*\right)$，其中 r_0 为改良工艺前所排放的废水中含有的污染物数量，r_1 为首次改良工艺后所排放的废水中含有的污染物数量，n 为改良工艺的次数.假设废水中含有的污染物数量不超过 $0.25\mathrm{g/m^3}$ 时符合废水排放标准，若该企业排放的废水符合排放标准，则改良工艺的次数最少要（　　）

（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）

A.14次　　B.15次　　C.16次　　D.17次

5.将函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ 的图象上的点横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标变）得到数 $g(x)$ 的图象，若存在 $\theta\in(0,\pi)$，使得 $g(x)+g(\theta-x)=2$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，则 $\theta=$（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6.如图，湖面上有4个小岛 A，B，C，D，现要建3座桥梁，将这4个小岛联通起来，则所有不同的建桥方案种数为（　　）

A.6　　B.16　　C.18　　D.20

7.已知各项均为正整数的递增数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=3$，$S_n=2023$，当n取大值时，a_n的值为（　　）

A.10　　B.61　　C.64　　D.73

8.在三棱锥$P-ABC$中，$PC\perp$平面ABC，$AB=1$，$AC=\sqrt{3}$，$PB=3\sqrt{3}$，$\angle ABP=90^\circ$，点M在该三棱锥的外接球O的球面上运动，且满足$\angle AMC=60^\circ$，则三棱锥$M-APC$的体积最大值为（　　）

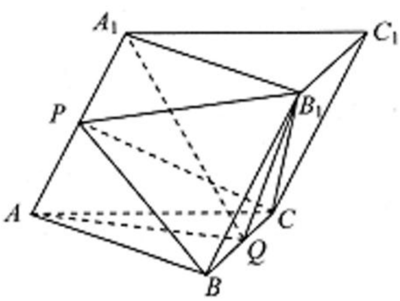
A.$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　B.$\dfrac{5\sqrt{21}}{6}$　　C.$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　D.$\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.某班共有 48 人，小明在一次数学测验中的成绩是第 5 名，则小明成绩的百分位数可能是（　　）

A.9　　B.10　　C.90　　D.91

10.如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\triangle ABC$是边长为 2 的正三角形，$\angle A_1AB=\angle A_1AC=45^\circ$，$AA_1=\sqrt{6}$，$P$，$Q$分别为棱$AA_1$，$BC$的中点，则（　　）



A.$BP\,//$平面A_1B_1Q　　B.平面$AA_1Q\perp$平面ABC

C.三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面积为$6\sqrt{3}$　　D.三棱锥B_1-PBC的体积为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

11.已知定义在 **R** 上的函数$f(x)$的图象连续不间断，若存在非零常数t，使得$f(x+1)+(1-1)f(x)=0$对任意的实数x恒成立，则称函数$f(x)$具有性质$H(t)$.则（　　）

A.函数 $f\left(x\right)=\sin\frac{\pi}{2}x$ 具有性质 $H\left(2\right)$

B.若函数 $f\left(x\right)$ 具有性质 $H\left(2\right)$，则 $f\left(x+4\right)=f\left(x\right)$

C.若 $f\left(x\right)=\sin\omega x\left(\omega>0\right)$ 具有性质 $H\left(2\right)$，则 $\omega=\frac{\pi}{2}$

D.若函数 $f\left(x\right)$ 具有性质 $H\left(\frac{1}{2}\right)$，且 $f\left(0\right)=1$，则 $f\left(k\right)=\frac{1}{4^k}$，$k\in\mathbf{N}^*$

12.已知双曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左，右焦点分别为 F_1，F_2，点 P 是双曲线 C 的右支上一点，过点 P 的直线与双曲线 C 的两条渐近线交于 M，N，则（　　）

A. $PF_1^2-PF_2^2$ 的最小值为 8

B.若直线 l 经过 F_2，且与双曲线 C 交于另一点 Q，则 $\left|PQ\right|$ 的最小值为 6

C. $\left|PF_1\right|\cdot\left|PF_2\right|-\left|OP\right|^2$ 为定值

D.若直线 l 与双曲线 C 相切，则点 M，N 的纵坐标之积为 -3

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知 $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中第 2 项，第 3 项，第 4 项的二项式系数依次构成等差数列，则其展开式中所有项的系数和为______.

14.为了解某大学射击社团的射击水平，分析组用分层抽样的方法抽取了 6 名老学员和 2 名新学员的某次射击成绩进行分析，经测算，6 名老学员的射击成绩样本均值为 8（单位：环），方差为 $\frac{5}{3}$（单位：环²）；2 名新学员的射击成绩分别为 3 环和 5 环，则抽取的这 8 名学员的射击成绩的方差为______环².

15.已知点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 是抛物线 $y^2=4x$ 上的动点，则 $\sqrt{2}x_0+\left|x_0-y_0+1\right|$ 的最小值为______.

16.在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 在圆 $C:x^2+\left(y-2\right)^2=2$ 上运动，点 Q 在函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax^2$ 的图象上运动，写出一条经过原点 O 且与圆 C 相切的直线方程为______；若存在点 P，Q 满足 $OP\perp OQ$，则实数 a 的取值范围是______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{2-a_n}$.

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）求证：数列$\{a_n\}$的前 n 项和$S_n < 1$.

18.（本小题满分 12 分）

在①$\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}=\dfrac{2a^2}{a^2+c^2-b^2}$，②$\sin B-\cos B=\dfrac{\sqrt{2}b-a}{c}$这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并完成解答

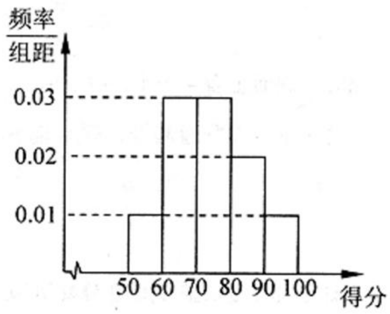
记$\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知______.

（1）求角 C 的大小；

（2）若点 D 在 AB 边上，且$BD=2AD$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$，求$\tan\angle BCD$的值.

19.（本小题满分 12 分）

2023 年，全国政协十四届一次会议于 3 月 4 日下午 3 时在人民大会堂开幕，3 月 11 日下午闭幕，会期 7 天半；十四届全国人大一次会议于 3 月 5 日上午开幕，13 日上午闭幕，会期 8 天半.为调查居民对两会相关知识的了解情况，某小区开展了两会知识问答活动，现将该小区参与该活动的 240 位居民的得分（满分 100 分）进行了统计，得到如下的频率分布直方图.



（1）若此次知识问答的得分 X 服从$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，其中$\mu$近似为参与本次活动的 240 位居民的平均得分（同一组中的数据用该组区间的中点值代表），求$P(66 < X \le 90)$的值；

（2）中国移动为支持本次活动提供了大力支持，制定了如下奖励方案：参与本次活动得分低于μ的居民获得一次抽奖机会，参与本次活动得分不低于μ的居民获得两次抽奖机会，每位居民每次有$\dfrac{2}{3}$的机会抽中一张 10 元的话费充值卡，有$\dfrac{1}{3}$的机会抽中一张 20 元的话费充值卡，假设每次抽奖相互独立，假设该小区居民王先生参与本次活动，求王先生获得的话费充值卡的总金额 Y（单位：元）的概率分布列，并估计本次活动中国移动需要准备的话费充值卡的总金额（单位：元）

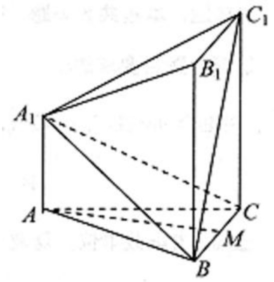
参考数据：$P\left(\mu-\sigma < X \le \mu+\sigma\right)\approx 0.6827$，$P\left(\mu-2\sigma < X \le \mu+2\sigma\right)\approx 0.9545$，

$P\left(\mu-3\sigma < X \le \mu+3\sigma\right)\approx 0.9973$.

20.（本小题满分 12 分）

如图，在多面体$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$，$CC_1 \perp$平面$ABC$，$\triangle ABC$是边长为 2 的正三角形，

$BB_1=CC_1=2$，点 M 是 BC 的中点，AM // 平面 A_1BC_1.



（1）求证：平面 $A_1BC_1\perp$ 平面 BB_1C_1C；

（2）求二面角 C_1-A_1B-C 的余弦值.

21.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左，右顶点分别为 A，B，过右焦点 F 的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，直线 AM，BN 交于点 P.

（1）记 $\triangle AFM$，$\triangle BFN$ 的面积分别为 S_1，S_2，若 $S_1=3S_2$，求点 P 的坐标；

（2）设点 $G\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$，若点 M 在直线 FG 的左侧，记直线 MG 与直线 $m:x=4$ 交于点 Q，求证：直线 FQ 平分 $\angle GFN$.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x}+ax-2$，其中 a 为实数.

（1）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最小值；

（2）若函数 $f(x)$ 在 **R** 上存在两个极值点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$.求证：$e^{x_2}-e^{x_1}>\dfrac{2}{a}-2$.