

# 武汉市 2023 届高三年级五月模拟训练试题

## 数 学 试 卷

武汉市教育科学研究院命制

2023.5.24

本试题卷共 5 页,22 题,全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上,并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目,在规定的位罝贴好条形码。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{y | y = \sqrt{x} + 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,  $B = \{y | y = e^x, x \in \mathbf{R}\}$ , 则  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$

- A.  $(0, +\infty)$       B.  $[1, +\infty)$       C.  $(0, 1)$       D.  $(-\infty, 1)$

2. 设复数  $z$  满足  $\frac{z-1}{z+1}$  为纯虚数, 则  $|z| =$

- A. 1      B.  $\sqrt{2}$       C.  $\sqrt{3}$       D. 2

3. 已知  $p: ab \leq 1, q: a + b \leq 2$ , 则  $p$  是  $q$  的

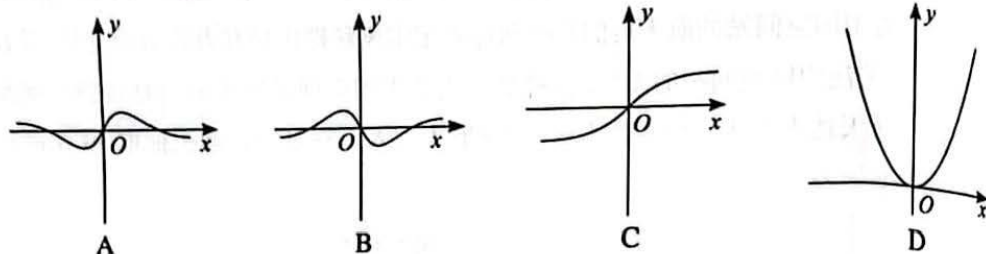
- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

4. 已知  $a = (1, 2)$ ,  $b$  为单位向量, 若  $a \cdot b + |a| \cdot |b| \leq 0$ , 则  $b =$

- A.  $(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$       B.  $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$       C.  $(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$       D.  $(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5})$

数学试卷 第 1 页(共 5 页)

5. 函数  $f(x) = \frac{\sin x}{e^x + e^{-x}}$  的部分图象可能为



6. 将  $1, 2, \dots, n$  按照某种顺序排成一列得到数列  $\{a_n\}$ , 对任意  $1 \leq i < j \leq n$ , 如果  $a_i > a_j$ , 那么称数对  $(a_i, a_j)$  构成数列  $\{a_n\}$  的一个逆序对. 若  $n=4$ , 则恰有 2 个逆序对的数列  $\{a_n\}$  的个数为
- A. 4                      B. 5                      C. 6                      D. 7
7. 已知点  $M, N$  是抛物线  $\Gamma: y^2 = 2px (p > 0)$  和动圆  $C: (x-1)^2 + (y-3)^2 = r^2 (r > 0)$  的两个公共点, 点  $F$  是  $\Gamma$  的焦点, 当  $MN$  是圆  $C$  的直径时, 直线  $MN$  的斜率为 2, 则当  $r$  变化时,  $r + |MF|$  的最小值为
- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6
8. 已知  $a = 1.01^{\ln(\ln 1.01)} - (\ln 1.01)^{\ln 1.01}$ ,  $b = \sin(\ln(1 + \cos 1.01))$ ,  $c = e^{\tan(\sin 1.01) + 1}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为
- A.  $a < b < c$               B.  $b < a < c$               C.  $c < b < a$               D.  $c < a < b$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

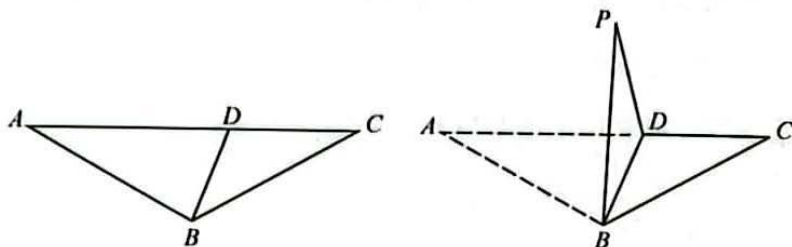
9. 已知圆  $C: x^2 + y^2 = 1$ , 直线  $l: y = x + 1$ , 则
- A. 直线  $l$  在  $y$  轴上的截距为 1              B. 直线  $l$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$
- C. 直线  $l$  与圆  $C$  有 2 个交点              D. 圆  $C$  上的点到直线  $l$  的最大距离为  $\sqrt{2}$
10. 在去年的足球联赛上, 甲队每场比赛平均失球数是 1.5, 方差为 1.1; 乙队每场比赛平均失球数是 2.1, 方差是 0.4, 下列说法正确的有
- A. 平均来说甲队比乙队防守技术好
- B. 乙队比甲队的防守技术更稳定
- C. 每轮比赛甲队的失球数一定比乙队少
- D. 乙队可能有一半的场次不失球

数学试卷 第 2 页(共 5 页)

11. 已知函数  $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) + \sin(\omega x + \frac{2\pi}{3}) + \dots + \sin(\omega x + \frac{n\pi}{3})$ , 其中  $\omega > 0, n \in \mathbf{N}^*$ , 则

- A. 若  $f(x)$  存在最小正周期  $T$  且  $T = \pi$ , 则  $\omega = 2$   
 B. 若  $\omega = 2$ , 则  $f(x)$  存在最小正周期  $T$  且  $T = \pi$   
 C. 若  $n = 3, \omega = 2\pi$ , 则  $g(x) = f(x - \frac{1}{3}) - 2(x - 1)$  的所有零点之和为 2  
 D. 若  $n = 3, \omega = 2$ , 则  $g(x) = \frac{f(x - \frac{\pi}{3})}{e^x}$  在  $(0, \pi)$  上恰有 2 个极值点

12. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 120^\circ, AB = BC = 2$ , 点  $D$  满足  $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{DA} (\lambda > 0)$ , 将  $\triangle ABD$  沿直线  $BD$  翻折到  $\triangle PBD$  位置, 则



- A. 若  $\lambda = 2$ , 则  $BD = \frac{\sqrt{39}}{6}$   
 B. 异面直线  $PC$  和  $BD$  夹角的最大值为  $\frac{\pi}{2}$   
 C. 三棱锥  $P-BCD$  体积的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
 D. 点  $P$  到平面  $BCD$  距离的最大值为 2

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

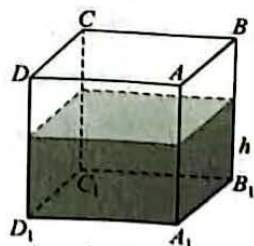
13. 在  $(2x + x^2)^4$  的展开式中, 含  $x^5$  项的系数为 \_\_\_\_\_.

14. 如图, 一个水平放置在桌面上的无盖正方体容器  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ,  $AB = 4$ , 容器内装

有高度为  $h$  的水, 现将容器绕着棱  $A_1B_1$  所在直线顺时针旋转

$45^\circ$ , 容器中溢出的水刚好装满一个半径为  $\sqrt{\frac{6}{\pi}}$  的半球形容

器, 不考虑容器厚度以及其它因素影响, 则  $h =$  \_\_\_\_\_.



15. 设样本空间  $\Omega = \{a, b, c, d\}$  含有等可能的样本点, 且  $A = \{a, b\}, B = \{a, c\}, C = \{a, d\}$ ,

则  $A, B, C$  三个事件 \_\_\_\_\_ (填“是”或“不是”) 两两独立, 且  $\frac{P(ABC)}{P(A)P(B)P(C)} =$

\_\_\_\_\_ (第 1 个空 2 分, 第 2 个空 3 分)

数学试卷 第 3 页(共 5 页)

16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 点  $A, B$  分别为椭圆  $C$  的左右顶点, 点  $F$  为椭圆  $C$  的右焦点,  $P$  为椭圆上一点, 且  $PF$  垂直于  $x$  轴. 过原点  $O$  作直线  $PA$  的垂线, 垂足为  $M$ , 过原点  $O$  作直线  $PB$  的垂线, 垂足为  $N$ , 记  $S_1, S_2$  分别为  $\triangle MON, \triangle PAB$  的面积. 若  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{40}{9}$ , 则椭圆  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知各项均不为零的数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n, a_1 = 1, 2S_n = a_n a_{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $S_k \leq 2023$  恒成立, 求正整数  $k$  的最大值.

18. (12 分)

$\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{3} \vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} \vec{BC} \cdot \vec{CA}$ .

(1) 求角  $A$ ;

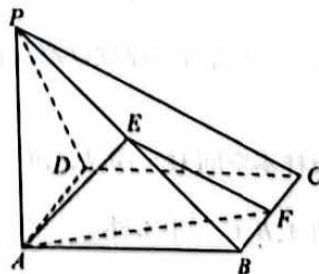
(2) 若  $b = 2$ , 求  $\triangle ABC$  的面积.

19. (12 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为正方形,  $PA \perp$  平面  $ABCD, PA = AB = 2$ ,  $E$  为线段  $PB$  的中点,  $F$  为线段  $BC$  上的动点.

(1) 求证: 平面  $AEF \perp$  平面  $PBC$ ;

(2) 求平面  $AEF$  与平面  $PDC$  夹角的最小值.



数学试卷 第 4 页(共 5 页)



20. (12分)

2023年5月10日长征七号火箭剑指苍穹,搭载天舟六号货运飞船为中国空间站运送补给物资,为中国空间站的航天员们长时间探索宇宙奥秘提供强有力的后援支持.某校部分学生十分关注中国空间站的发展,若将累计关注中国空间站发展的消息达到6次及以上者称为“航天达人”,未达到6次者称为“非航天达人”.现从该校随机抽取50人进行分析,得到数据如表所示:

	航天达人	非航天达人	合计
男	20		26
女		14	
合计			

(1) 补全  $2 \times 2$  列联表,根据小概率值  $\alpha = 0.010$  的独立性检验,能否认为“航天达人”与性别有关联?

(2) 现从抽取的“航天达人”中,按性别采用分层抽样的方法抽取6人,然后从这6人中随机抽取3人,记这3人中女“航天达人”的人数为  $X$ ,求  $X$  的分布列和数学期望.

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$\alpha$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
$\chi_{\alpha}$	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

21. (12分)

已知双曲线  $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的一条渐近线为  $y = -\frac{1}{2}x$ , 椭圆  $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的长轴长为4, 其中  $a > b > 0$ . 过点  $P(2, 1)$  的动直线  $l_1$  交  $C_1$  于  $A, B$  两点, 过点  $P$  的动直线  $l_2$  交  $C_2$  于  $M, N$  两点.

(1) 求双曲线  $C_1$  和椭圆  $C_2$  的方程;

(2) 是否存在定点  $Q$ , 使得四条直线  $QA, QB, QM, QN$  的斜率之和为定值? 若存在, 求出点  $Q$  坐标; 若不存在, 说明理由.

22. (12分)

已知  $f(x) = ax + \frac{b}{x} + c - \ln x$ , 其中  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

(1) 若  $b = c = 0$ , 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 已知  $x_1, x_2$  是  $f(x)$  的两个零点, 且  $x_1 < x_2$ , 证明:  $x_2(ax_1 - 1) < b < x_1(ax_2 - 1)$ .

数学试卷 第5页(共5页)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

