2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(二)

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $M=\{x|y=\ln(4-x)\}$, $N=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$,则 $M\cap N=$

A. $\{x|0<x\leqslant 5\}$　B. $\{x|0\leqslant x<4\}$　C. $\{x|4\leqslant x<5\}$　D. $\{x|4<x\leqslant 5\}$

2. 设 p: $a\in[5,+\infty)$, q: 方程 $x^2+ay^2=1$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆,则

A. p 是 q 的充分条件但不是必要条件　B. p 是 q 的必要条件但不是充分条件

C. p 是 q 的充要条件　D. p 既不是 q 的充分条件也不是 q 的必要条件

3. 函数 $y=x-3\sqrt{2\,021-x}$ 的值域为

A. $(-\infty,-2\,021]$　B. $(-\infty,2\,021]$　C. $[0,+\infty)$　D. $[3,+\infty)$

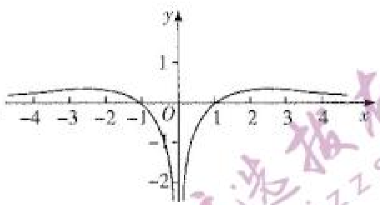
4. 若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 且满足 $2\sin\alpha(2-\sin\alpha)=\cos 2\alpha$,则 $\tan\alpha=$

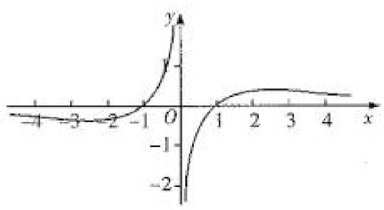
A. $\frac{\sqrt{15}}{3}$　B. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　D. $\frac{\sqrt{15}}{15}$

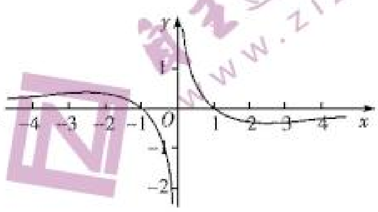
5. 已知命题 p: $\exists x_0\in\mathbf{R}$, $\sin x_0<1$;命题 q:当 $t\in(0,2)$ 时,函数 $g(x)=x^2-3tx+1$ 在 $(0,4)$ 上存在最小值.则下列命题中的真命题是

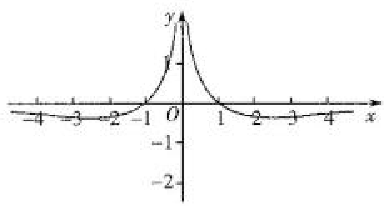
A. $p\wedge q$　B. $(\neg p)\wedge q$　C. $p\wedge(\neg q)$　D. $\neg(p\vee q)$

6. 函数 $f(x)=\frac{2\ln|x|}{2^x+2^{-x}}$ 的大致图象为

A. 

B. 

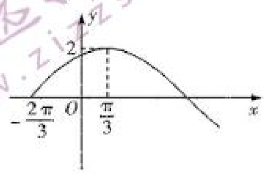
C. 

D. 

7. 已知 $a,b,c\in(0,+\infty)$，$a=5+\log_{\frac{1}{4}}a$，$b+\frac{1}{2^b}=3$，$c+4^c=4$，则

A. $b<a<c$　　B. $a<c<b$　　C. $c<a<b$　　D. $c<b<a$

8. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则下列说法中正确的是



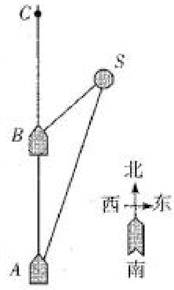
A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

B. $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$

C. 点 $\left(\frac{10\pi}{3},0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心

D. 直线 $x=2\pi$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

9. 今年第6号台风"烟花"于2021年7月25日12时30分前后登陆舟山普陀区. 如图，A 点正北方向的 C 市受到台风侵袭，一艘船从 A 点出发前去实施救援，以24 n mile/h 的速度向正北航行，在 A 处看到 S 岛在船的北偏东15°方向，船航行 $\frac{3}{4}$ h 后到达 B 处，在 B 处看到 S 岛在船的北偏东45°方向. 此船从 A 点到 C 市航行过程中距离 S 岛的最近距离为



A. $9\sqrt{2}$ n mile　　B. $9(\sqrt{2}-1)$ n mile

C. $9(\sqrt{3}-1)$ n mile　　D. $9(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ n mile

10. 将函数 $f(x)=-2\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，再将得到的图象上各点的横坐标变为原来的2倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列区间是 $g(x)$ 的一个单调递减区间的为

A. $[-4,-2]$　　B. $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$

C. $[-7,-6]$　　D. $[6,8]$

11. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[a+2-m,b+2-m]$，其中 $a\neq b$，则实数 m 的取值范围是

A. $\left(\frac{3}{4},1\right]$　　B. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4},1\right]$　　D. $\left[\frac{3}{4},1\right]$

12. 若函数 $f(x)=2x+\frac{1}{2}\sin 2x-a\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恰有两个不同的极值点，则实数 a 的取值范围是

A. $(\sqrt{2},3)$　　B. $(2\sqrt{2},3)$　　C. $(2\sqrt{2},4)$　　D. $(\sqrt{2},6)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知函数 $f(x)=x^3-2x^2+x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为________.

14. 有以下三个条件：①定义域不是 $\mathbf{R}$ 但值域为 $\mathbf{R}$；②在 $(-1,1)$ 上单调递减；③是奇函数. 写出一个同时满足以上三个条件的函数：$f(x)=$________.

15. 若存在 $x\in[0,1]$，使得 $3^x+\frac{1}{3^x}\geq 7m+1$ 成立，则实数 m 的取值范围是________.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 b,a,c 成等差数列，$c+a=2a\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{2}b$，且 $a=2$，则 $\triangle ABC$ 的面积为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $a\in\mathbf{R}$，命题 p：不等式 $e^x+\frac{4}{e^x}\geqslant a$ 的解集为 $\mathbf{R}$；命题 q：$f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, x<1,\\ -x+1, x\geqslant 1\end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数. 若"p 且 q"为假命题，"p 或 q"为真命题，求 a 的取值范围.

18. (12 分)

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0)$ 图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(Ⅰ) 若 $f(x)=1$，求 x 的值；

(Ⅱ) 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度，所得图象与函数 $y=2\cos 2x$ 的图象重合，求实数 m 的最小值.

19. (12 分)

已知某公司生产的一新款手机的年固定成本为 350 万元，设该公司一年内共生产这种手机 x 万部并全部销售完，且每万部的销售收入为 600 万元，生产这种手机每年需另投入成本 $R(x)$ 万元，且当 $0<x<40$ 时，$R(x)=10x(x+10)$，当 $x\geqslant 40$ 时，$R(x)=601x+\frac{40\ 000}{x}-6\ 550$.

(Ⅰ) 写出年利润 W(万元) 关于年产量 x(万部) 的函数解析式. (年利润 = 年销售收入 − 年成本)

(Ⅱ) 年产量为多少万部时，该公司所获年利润最大？最大年利润是多少？

20.（12 分）

在锐角△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$\sqrt{3}\cos C+\sin C=\sqrt{3}b$ 且 $a=1$.

（Ⅰ）求△ABC 的外接圆的半径；

（Ⅱ）求 $2b-c$ 的取值范围.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2-2x(a\in\mathbf{R})$ 在 $x=2$ 处取得极值.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在 $[-2,1]$ 上的最小值；

（Ⅱ）若关于 x 的方程 $f(x)+b=0(b\in\mathbf{R})$ 有唯一解，求 b 的取值范围.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+ax+2(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $g(x)=e^x-x^2$，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求 a 的最大值.

天一大联考
2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(二)
理科数学 · 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. B	2. A	3. B	4. D	5. A	6. A
7. D	8. C	9. C	10. D	11. A	12. B

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. $5x-y-8=0$　　14. $-\tan x$(答案不唯一)

15. $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$　　16. $\sqrt{3}$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析**　因为 $e^x+\frac{4}{e^x}\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot\frac{4}{e^x}}=4$,不等式 $e^x+\frac{4}{e^x}\geqslant a$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

所以 $a\leqslant 4$,

即命题 p 为真时,$a\leqslant 4$. ……………………………………………… (3 分)

因为函数 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a,x<1,\\-x+1,x\geqslant 1\end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

所以 $\begin{cases}3a-1<0,\\3a-1+4a\geqslant -1+1,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{7}\leqslant a<\frac{1}{3}$,

即命题 q 为真时,实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$. ……………………………… (6 分)

因为"p 且 q"为假命题,"p 或 q"为真命题,所以 p,q 一真一假.

若 p 真 q 假,可得 $a\in\left(-\infty,\frac{1}{7}\right)\cup\left[\frac{1}{3},4\right]$,若 p 假 q 真,可得 $a\in\varnothing$. ……………… (9 分)

故实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{7}\right)\cup\left[\frac{1}{3},4\right]$. ……………………………… (10 分)

18. **解析**　(Ⅰ) $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}\cos\omega x\right)$

$=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$. ……………………………………………… (2 分)

因为 $f(x)$ 图象的相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

所以 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi,\omega=2$.

所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$. ……………………………………………… (4 分)

令 $f(x)=1$，可得 $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1$，$2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$. ……………………（6 分）

（Ⅱ）将 $f(x)$ 的图象向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度，

得到 $y=2\sin\left(2x+2m-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象， ……………………（8 分）

所得图象与函数 $y=2\cos 2x$ 的图象重合，

所以 $2m-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

$m=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. ……………………（10 分）

因为 $m>0$，所以当 $k=0$ 时，m 取得最小值，且最小值为 $\frac{\pi}{3}$. ……………………（12 分）

19. **解析** （Ⅰ）当 $0<x<40$ 时，$W(x)=600x-10x(x+10)-350=-10x^2+500x-350$， ……………………（2 分）

当 $x\geqslant 40$ 时，$W(x)=600x-\left(601x+\frac{40\ 000}{x}-6\ 550\right)-350=-\left(x+\frac{40\ 000}{x}\right)+6\ 200$， ……………………（4 分）

$$\therefore W(x)=\begin{cases}-10x^2+500x-350, & 0<x<40,\\ -\left(x+\frac{40\ 000}{x}\right)+6\ 200, & x\geqslant 40.\end{cases}$$ ……………………（6 分）

（Ⅱ）若 $0<x<40$，$W(x)=-10(x-25)^2+5\ 900$，

当 $x=25$ 时，$W(x)_{\max}=5\ 900$， ……………………（8 分）

若 $x\geqslant 40$，$W(x)=-\left(x+\frac{40\ 000}{x}\right)+6\ 200\leqslant 6\ 200-2\sqrt{40\ 000}=5\ 800$，

当且仅当 $x=\frac{40\ 000}{x}$，即 $x=200$ 时，$W(x)_{\max}=5\ 800$， ……………………（10 分）

$\therefore$ 年产量为 25 万部时，该公司所获年利润最大，最大年利润是 5 900 万元. ……………………（12 分）

20. **解析** （Ⅰ）由 $\sqrt{3}\cos C+\sin C=\sqrt{3}b$ 且 $a=1$ 可得 $a(\sqrt{3}\cos C+\sin C)=\sqrt{3}b$，

根据正弦定理可得 $\sqrt{3}\sin B=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sin C\sin A$. ……………………（1 分）

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore \sin B=\sin(A+C)$，

代入得 $\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\cos A\sin C=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sin C\sin A$，

$\therefore \sqrt{3}\cos A\sin C=\sin C\sin A$. ……………………（3 分）

$\because 0<C<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \sin C\neq 0$，$\therefore \tan A=\sqrt{3}$，

又 $\because 0<A<\frac{\pi}{2}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$. ……………………（4 分）

设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R.

由正弦定理可得 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

解得 $R=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $2R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore 2b - c = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin B - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin C$

$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)$

$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin B - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin B - \cos B$

$= \sqrt{3}\sin B - \cos B$

$= 2\sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right)$. …………………………………………………………………… (9 分)

$\because \triangle ABC$ 为锐角三角形，

$\therefore \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ 即 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$， …………………………………………………… (10 分)

则 $0 < B - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$，

$\therefore 0 < 2\sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}$，

即 $2b - c$ 的取值范围为 $(0, \sqrt{3})$. …………………………………………………… (12 分)

21. 解析 (Ⅰ) 由 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 - 2x$，可得 $f'(x) = x^2 - ax - 2$，

由 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极值，可得 $f'(2) = 4 - 2a - 2 = 0$，解得 $a = 1$. ………………………… (2 分)

此时 $f'(x) = x^2 - ax - 2 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$，

显然 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的一个极值点，$a = 1$ 满足题意.

若 $x \in [-2, -1)$，则 $f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增；

若 $x \in [-1, 1]$，则 $f'(x) \leqslant 0$，$f(x)$ 单调递减. ……………………………………………… (4 分)

因为 $f(-2) = -\frac{8}{3} - 2 + 4 = -\frac{2}{3}$，$f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{13}{6}$，

所以 $f(x)$ 在 $[-2, 1]$ 上的最小值为 $-\frac{13}{6}$. …………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ) 设 $g(x) = f(x) + b = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + b$.

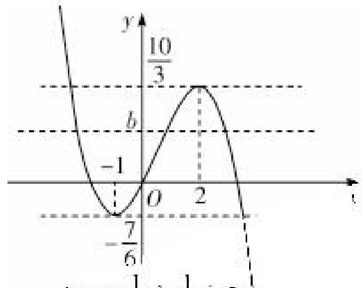
由 $g(x) = 0$ 可得 $b = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$.

令 $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x$，则 $h'(x) = -x^2 + x + 2 = -(x-2)(x+1)$，………………… (8 分)

所以 $h'(2) = 0$，$h'(-1) = 0$，且当 $x < -1$ 时，$h'(x) < 0$，当 $-1 < x < 2$ 时，$h'(x) > 0$，当 $x > 2$ 时，$h'(x) < 0$.

所以 $h(x)_{极小值} = h(-1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{7}{6}$，$h(x)_{极大值} = h(2) = -\frac{1}{3} \times 8 + \frac{1}{2} \times 4 + 4 = \frac{10}{3}$. ……… (10 分)

$h(x)$ 的大致图象如图：



$h(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x$

因为关于 x 的方程 $f(x)+b=0(b\in\mathbf{R})$ 有唯一解,

所以 b 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{7}{6}\right)\cup\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$. ······························ (12 分)

22. 解析 (Ⅰ)由题可知 $f'(x)=\frac{1}{x}+a(x>0)$. ······························ (1 分)

当 $a\geqslant0$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, ······························ (2 分)

当 $a<0$ 时,令 $f'(x)=0$,可得 $x=-\frac{1}{a}$,

当 $x\in\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,

当 $x\in\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减.

综上:当 $a\geqslant0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;当 $a<0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增,在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. ······························ (5 分)

(Ⅱ)由 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立,

可得 $a\leqslant\frac{e^x-\ln x-x^2-2}{x}$ 恒成立.

设 $g(x)=\frac{e^x-\ln x-x^2-2}{x}$,

则 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)+\ln x-x^2+1}{x^2}=\frac{(x-1)[e^x-(x+1)]-\ln x}{x^2}$, ······························ (7 分)

令 $\mu(x)=e^x-x-1$,则 $\mu'(x)=e^x-1$,因为 $x>0$,所以 $\mu'(x)>0$,

所以 $\mu(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $\mu(x)>\mu(0)=0$,即 $e^x>x+1$. ······························ (9 分)

因为 $e^x-(x+1)>0$,当 $x\in(0,1)$ 时,$x-1<0$,$\ln x<0$,当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$x-1>0$,$\ln x>0$,

所以在 $(0,1)$ 上 $g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上 $g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增. ······························ (11 分)

所以在 $(0,+\infty)$ 上,$g(x)\geqslant g(1)=e-3$,所以 $a\leqslant e-3$.

所以 a 的最大值为 $e-3$. ······························ (12 分)

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。