华大新高考联盟名校 2020 年 5 月高考预测考试

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】A

【解析】A 中包含 2 个元素：1，2，故子集个数为 4，非空子集个数为 3，故选 A.

2.【答案】D

【解析】易发现 p，q 均为假命题，故选 D.

3.【答案】B

【解析】由任意角的三角函数定义可知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\sin\beta=\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})=\cos\alpha=\frac{3}{5}$，故选 B.

4.【答案】A

【解析】该程序为裂项相消求和，依题意知首项为$\frac{1}{1\times3}$，末项为$\frac{1}{7\times9}$，故选 A.

5.【答案】B

【解析】函数 $f(x)$ 为奇函数，故排除 A，C. $f'(x)=\frac{2x\sin x\cos x-\sin^2 x}{x^2}$，所以 $f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{4}{\pi^2}<0$，故图象在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线斜率为负，故选 B.

6.【答案】C

【解析】用列举法，所有情况为：(1，2)，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(3，4)，(3，5)，(4，5)，共 10 种. 其中和为奇数的情况包含 6 种：(1，2)，(1，4)，(2，3)，(2，5)，(3，4)，(4，5)，故概率为$\frac{3}{5}$，故选 C.

7.【答案】D

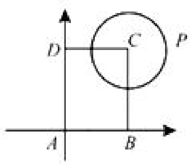
【解析】易得 $\omega=2$，所以 $y=\tan(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi)$ 为奇函数，$\varphi+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 $f(x)=\tan(2x+\frac{\pi}{6})$，最小正周期为$\frac{\pi}{2}$，渐近线方程为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，对称中心为$(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{4},0)(k\in\mathbf{Z})$，单调递增区间为$(-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})(k\in\mathbf{Z})$，故选 D.

8.【答案】A

【解析】函数 $f(x)=x+\frac{1}{x-1}+1$ 的图象的对称中心为(1，2)，所以 $a+b=1$，$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)(\frac{4}{a}+\frac{1}{b})=4+1+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant5+2\sqrt{4}=9$，当且仅当 $a=2b=\frac{2}{3}$时等号成立，故选 A.

9.【答案】B

【解析】如图，点 P 在圆 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 上，设 $P(2\cos\theta+3,2\sin\theta+4)$，又 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，所以$\begin{cases}2\cos\theta+3=3\lambda\\2\sin\theta+4=4\mu\end{cases}$，从而 $\lambda+\mu=\frac{2}{3}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+2=\frac{5}{6}\sin(\theta+\varphi)+2\geqslant\frac{7}{6}$，故选 B.



10.【答案】A

【解析】依题意，任意水平面与"牟合方盖"及其内切球相交的截面为正方形和一个正方形的内切圆，正方形和内切圆的面积比为 $4:\pi$，由祖暅原理，"牟合方盖"的体积和内切球的体积比为 $4:\pi$，又球的体积为 $\frac{4}{3}\pi$，故"牟合方盖"的体积为 $\frac{16}{3}$，故选 A.

11.【答案】C

【解析】依题意，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=4b$. 同时将上述两式等号两边平方得
$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|=4a^2$，$|PF_1|^2+|PF_2|^2+2|PF_1||PF_2|=16b^2$，
解得 $3(|PF_1|^2+|PF_2|^2)=32b^2+4a^2$，$3|PF_1||PF_2|=16b^2-4a^2$. （*）
又由余弦定理 $|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2=|PF_1||PF_2|$，将（*）式代入，可得方程 $4b^2+2a^2-3c^2=0$，整理得 $c^2=2a^2$，故离心率为 $\sqrt{2}$，故选 C.

12.【答案】B

【解析】构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，$g'(x)$ 的符号与 $x+1$ 的符号相反，故 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减；又 $f(-1+x)=f(-1-x)e^{2x}$，所以 $\frac{f(-1+x)}{e^{-1+x}}=\frac{f(-1-x)}{e^{-1-x}}$，即 $g(-1+x)=g(-1-x)$. 故 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 关于直线 $x=-1$ 对称.
综上，$g(0)=g(-2)<g(-1)$，故选 B.

二、填空题

13.【答案】3.

【解析】$1\times4^0+m\times4^2+2\times4^3=177$，解得 $m=3$.

14.【答案】$a>\frac{1}{4}$.

【解析】由题意得，命题"存在 $x\in\mathbf{R}$，使 $ax^2-x+1\leq0$"的否定"对任意 $x\in\mathbf{R}$，使 $ax^2-x+1>0$"为真命题. 即 $ax^2-x+1>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立. 而当 $a=0$ 时，$-x+1>0$ 不恒成立，所以有 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=1-4a<0\end{cases}$，解得 $a>\frac{1}{4}$.

15.【答案】6.

【解析】由 $b^2+c^2-a^2=ac\cos C+c^2\cos A$ 得 $b^2+c^2-a^2=c(a\cos C+c\cos A)=bc$，则 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$. 又 $A\in(0,\pi)$，则 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $s=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，得 $bc=4$. 因此 $a^2=b^2+c^2-4$. 故 $a+b+c=\sqrt{b^2+c^2-4}+b+c\geq\sqrt{2bc-4}+2\sqrt{bc}=6$（当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立）.

16.【答案】$\frac{10\pi}{3}$.

【解析】由已知可知 $BC=BD=CD=1$. 设 $\triangle BCD$ 外接圆的直径为 $2r$，则 $\frac{1}{\sin60^\circ}=2r\Rightarrow r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $AD\perp DC$，$AD\perp DB$. 所以 $AD\perp$ 面 BCD，R 表示外接球的半径，$R^2=(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{AD}{2})^2=\frac{1}{3}+(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{5}{6}$. 所以 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{5}{6}=\frac{10\pi}{3}$.

三、解答题

17.【解析】(1) $k^2=\frac{50\times(20\times15-5\times10)^2}{25\times25\times20\times30}=8.333>6.635$，…………………………………… 3 分

所以有 99%的把握认为患新冠肺炎与气温有关. ………………………………………………………… 5 分

(2)从 108 人中按照分层抽样的方法随机抽取 6 人，老年、中年、青年分别抽取的人数为 3 人，2 人，1 人，记 3 个老年人为 A_1, A_2, A_3，2 个中年人为 B_1, B_2，1 个青年人为 C_1，抽取的全部结果为 (A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,C_1)，(A_2,A_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,C_1)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_3,C_1)，(B_1,B_2)，(B_1,C_1)，(B_2,C_1)共 15 种. ………………………………………………………… 8 分

至少 1 人是老年人的有(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,C_1)，(A_2,A_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,C_1)，(A_3,B_1)，(A_3,B_2)，(A_3,C_1)，共 12 种. ………………………………………… 10 分

所以至少 1 人是老年人的概率为 $p=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$. ………………………………………… 12 分

18.【解析】(1) $\begin{cases}S_4=30\\a_2+a_4=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1(1+q+q^2+q^3)=30\\a_1(q+q^3)=20\end{cases}$. ………………………………………… 2 分

解得 $a_1=2, q=2$. ………………………………………………………… 4 分

所以 $a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知 $a_n=2^n$，所以 $S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2(2^n-1)$，………………………………………… 7 分

又 $\frac{2^n}{S_n\cdot S_{n+1}}=\frac{2^n}{2(2^n-1)\cdot 2(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$，………………………………… 9 分

则 $T_n=\frac{1}{4}\cdot\left[(1-\frac{1}{2^2-1})+(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1})+\cdots+(\frac{1}{2_n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})\right]$

$=\frac{1}{4}\cdot(1-\frac{1}{2^{n+1}-1})=\frac{1}{4}\cdot\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}=\frac{2^n-1}{2(2^{n+1}-1)}$. ………………………………… 12 分

19.【解析】(1)因为 AB 是圆 O 的直径，点 C 是圆 O 上一点，则 $AC\perp BC$. 又 $PA\perp$平面 ABC，所以 $PA\perp BC$. 又 $PA\cap AC=A$，则 $BC\perp$平面 PAC. 又 $AE\subset$平面 PAC，则 $BC\perp AE$. 所以异面直线 AE 与 BC 所成的角为 90°. ………………………………………………………… 5 分

(2)设 $\frac{AM}{BM}=t$. 因为 $PA=AC=BC=2$，所以 $AB=2\sqrt{2}$. 则 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2=2\sqrt{2}$.

又因为 F 是 PB 的中点，所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}S_{\triangle PAB}=\sqrt{2}$. 因为 $\frac{AM}{BM}=t$，所以 $\frac{S_{\triangle AMF}}{S_{\triangle BMF}}=t$.

又 $S_{\triangle AMF}+S_{\triangle BMF}=S_{\triangle ABF}=\sqrt{2}$，则 $S_{\triangle AMF}=\frac{\sqrt{2}t}{t+1}$.

又 E 是 PC 的中点，则点 E 到平面 PAB 的距离等于点 C 到平面 PAB 的距离的一半.

故点 C 到平面 PAB 的距离为 $\sqrt{2}$. ………………………………………………………… 8 分

$V_{M-AEF}=V_{E-AMF}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle AMF}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}t}{t+1}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{9}$，解得 $t=\frac{1}{2}$，即 $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$. …………………… 12 分

20.【解析】(1)设 $P(x,y)$，由 $|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{PQ}|$ 得 $|2-x|=\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}$，平方化简得 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. … 4 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，联立 $\begin{cases}y=x+m\\\frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得 $x^2+2(x+n)^2-2=0$，即 $3x^2+4nx+2n^2-2=0$，所以 $x_1+x_2=-\frac{4n}{3}$，$y_1+y_2=x_1+x_2+2n=\frac{2n}{3}$. ……………………………………… 6 分

假设存在点 M 使得四边形 $MAOB$ 为平行四边形，则 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，所以 $(x_3,y_3)=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)$，

所以 $x_3=x_1+x_2=-\frac{4n}{3}$，$y_3=y_1+y_2=\frac{2n}{3}$. ………………………………………………… 8 分

由点 M 在曲线 C 上得 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，代入得 $\frac{8n^2}{9}+\frac{4n^2}{9}=1$，解得 $n^2=\frac{3}{4}$，$n=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………… 10 分

所以当 $n=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，曲线 C 上存在点 M 使得四边形 $MAOB$ 为平行四边形，此时点 M 的坐标为$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$或者 $M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 当 $n\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，曲线 C 上不存在点 M 使得四边形 $MAOB$ 为平行四边形. …… 12 分

21.【解析】(1) 当 $n=-1$ 时，$g(x)=\frac{x-1}{x+1}$，$y=g(x-m)=\frac{x-m-1}{x-m+1}=1-\frac{2}{x-m+1}$，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，由图象知 $m-1\leqslant 1$，所以 $m\leqslant 2$. ……………………………………………………………………… 3 分

(2) 易知函数 $y=f(x)-g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，而

$$y'=f'(x)-g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1-n}{(x+1)^2}=\frac{x^2+(n+1)x+1}{x(x+1)^2}=\frac{x+\frac{1}{x}+n+1}{(x+1)^2}.$$ ……………………………… 4 分

由题意知 $x+\frac{1}{x}+n+1$ 的最小值为负，则 $n+3<0$，所以 $n<-3$. ……………………………………… 6 分

(3) 令 $\theta(x)=f\left(\frac{2a}{x}\right)\cdot f(e^{ax})+f\left(\frac{x}{2a}\right)=ax\cdot\ln 2a-ax\cdot\ln x+\ln x-\ln 2a$，其中 $x>0$，$a>0$. 则 $\theta'(x)=a\cdot\ln 2a-a\ln x-a+\frac{1}{x}$，令 $\delta(x)=a\cdot\ln 2a-a\ln x-a+\frac{1}{x}$，$\delta'(x)=-\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=-\frac{ax+1}{x^2}<0$，$\delta(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$\delta(x)=0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上必存在实根，不妨设 $\delta(x_0)=0$，即 $\delta(x_0)=a\cdot\ln 2a-a\ln x_0-a+\frac{1}{x_0}=0$，即 $\delta(x_0)=ax_0\cdot\ln 2a-ax_0\ln x_0-ax_0+1=0$，(*) ……………………………… 8 分

$\theta(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\theta(x)_{\max}=\theta(x_0)$.

而 $\theta(x_0)=ax_0\cdot\ln 2a-ax_0\cdot\ln x_0+\ln x_0-\ln 2a$，代入(*)式得 $\theta(x_0)=ax_0+\frac{1}{ax_0}-2$.

根据题意知 $\theta(x_0)=ax_0+\frac{1}{ax_0}-2\leqslant 0$ 恒成立. ………………………………………………………… 10 分

又根据不等式 $ax_0+\frac{1}{ax_0}\geqslant 2$，当且仅当 $ax_0=\frac{1}{ax_0}$ 时等式成立，所以 $ax_0+\frac{1}{ax_0}=2$，$ax_0=1$，将 $x_0=\frac{1}{a}$ 代入

(*)式得 $\ln\frac{1}{a}=\ln 2a$，即 $\frac{1}{a}=2a$，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………… 12 分

(以下解法酌情给分)

另解 1：$\theta(x)=ax\cdot\ln 2a-ax\cdot\ln x+\ln x-\ln 2a=(ax-1)(\ln 2a-\ln x)$，其中 $x>0$，$a>0$.

要使得 $(ax-1)(\ln 2a-\ln x)\leqslant 0$ 对任意正数 x 恒成立，等价于 $(ax-1)(2a-x)\leqslant 0$ 对任意正数 x 恒成立，即 $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2a)\geqslant 0$ 对任意正数 x 恒成立. 设函数 $\varphi(x)=\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2a)$，则 $\varphi(x)$ 的函数图象为开口向上，与 x 轴正半轴至少有一个交点的抛物线. 因此，据题意抛物线只能与 x 轴有一个交点可知 $\frac{1}{a}=2a$，所以 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

另解 2：$\theta(x)=ax\cdot\ln 2a-ax\cdot\ln x+\ln x-\ln 2a=(ax-1)(\ln 2a-\ln x)$，其中 $x>0$，$a>0$. 根据条件 $f\left(\frac{2a}{x}\right)\cdot f(e^{ax})+f\left(\frac{x}{2a}\right)\leqslant 0$ 对任意正数 x 恒成立，即 $(ax-1)(\ln 2a-\ln x)\leqslant 0$ 对任意正数 x 恒成立，

所以 $\begin{cases}ax-1\geqslant 0\\ \ln 2a-\ln x\leqslant 0\\ a>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ax-1\leqslant 0\\ \ln 2a-\ln x\geqslant 0\\ a>0\end{cases}$，解得 $\frac{1}{a}\leqslant 2a$ 或 $2a\leqslant\frac{1}{a}$，即 $\frac{1}{a}=2a$，$a>0$，所以上述条件成立时 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

22.【解析】(1)直线 l 的普通方程为 $3x-2y-8=0$，曲线 C 的普通方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$. ………………… 4 分

(2)曲线 C 上任意一点 $P(\cos\theta,2\sin\theta)$ 到 l 的距离为 $d=\frac{|3\cos\theta-4\sin\theta-8|}{\sqrt{13}}$. ……………………… 6 分

则 $|PQ|=\frac{d}{\sin 30^\circ}=2d=\frac{2\sqrt{13}}{13}|5\cos(\theta+\alpha)-8|$，其中 α 为锐角，且 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$.

当 $\cos(\theta+\alpha)=-1$ 时，$|PQ|$ 取得最大值，最大值为 $2\sqrt{13}$. ……………………………………… 8 分

当 $\cos(\theta+\alpha)=1$ 时，$|PQ|$ 取得最小值，最小值为 $\frac{6\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………… 10 分

23.【解析】(1)因为 $||x+1|-|x-1||\leq|(x+1)-(x-1)|=2$，所以 $-2\leq|x+1|-|x-1|\leq2$.

当 $x\leq-1$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -2；当 $x\geq1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2.

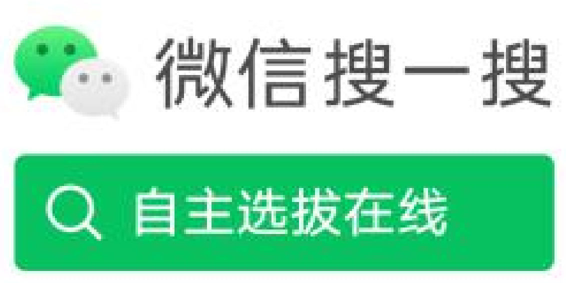
所以 $y=f(x)$ 的值域为 $[-2,2]$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)由题意知，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$y=f(x)$ 的图象恒在射线 $y=ax+b$ 的下方，作出两函数在 $x\in[0,+\infty)$ 时的图象，易得 $\begin{cases}0\leq b\leq2\\a\geq2-b\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b\geq2\\a\geq0\end{cases}$，即当 $a\geq0$ 且 $b\geq0$ 且 $a+b\geq2$ 时，求 $a+2b$ 的最小值. 根据线性规划，当 $a=2,b=0$ 时，$a+2b$ 有最小值 2. ……………………………………… 10 分

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“**答题模板**”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“**必背知识点**”,即可获取《高考考前必背知识点》