雅礼中学2020届高三月考试卷(七)

数学(文科)参考答案

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	D	D	C	B	A	C	B	C	C	A	A	A

1. D 【解析】$\because A=\{y|y=\lg x\}=\{y|y\in\mathbf{R}\}$,

$B=\{x|y=\sqrt{1-x}\}=\{x|1-x\geqslant 0\}=\{x|x\leqslant 1\}$,

$\therefore A\cap B=\{x|x\leqslant 1\}=(-\infty,1]$. 故选:D.

2. D 【解析】$\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{2}=-\mathrm{i}$,

$\therefore a+b\mathrm{i}=-(-\mathrm{i})=\mathrm{i}$,

$\therefore a=0,b=1,\therefore a+b=1$,故选:D.

3. C 【解析】由图知选C.

4. B 【解析】由流程图可知该算法的功能为计算 $S=1+2^1+2^2+2^3+2^4$ 的值,即输出的值为 $S=1+2^1+2^2+2^3+2^4=\dfrac{1\times(1-2^5)}{1-2}=31$. 故选B.

5. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(1+\lambda,1-3\lambda)$,又因为$(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$,

所以$(1+\lambda,1-3\lambda)\cdot(2,1)=2+2\lambda+1-3\lambda=0$,解得 $\lambda=3$,故选:A.

6. C 【解析】根据题意,函数 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,则 $b=f\left(\log_3\dfrac{1}{27}\right)=f(-3)=f(3)$,

又由 $0<\sqrt{2}<2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}<3$,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=x^3+3x$ 在$[0,+\infty)$上单调递增,

则有 $f\left(\log_3\dfrac{1}{27}\right)>f(2^{\frac{3}{2}})>f(\sqrt{2})$,即 $b>a>c$,故选:C.

7. B 【解析】"直线 $l_1:2x+(m+1)y+4=0$ 与直线 $l_2:mx+3y-2=0$ 平行"$\Rightarrow$"$m=2$ 或 $m=-3$".

"$m=2$"$\Rightarrow$"直线 $l_1:2x+(m+1)y+4=0$ 与直线 $l_2:mx+3y-2=0$ 平行",

"直线 $l_1:2x+(m+1)y+4=0$ 与直线 $l_2:mx+3y-2=0$ 平行"是"$m=2$"的必要不充分条件. 故选:B.

8. C 【解析】根据题意:函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}\sin x$,其定义域为 $\mathbf{R}$,

有 $f(-x)=\dfrac{(-x)}{1+(-x)^2}\sin(-x)=\dfrac{x}{1+x^2}\sin x=f(x)$,即函数为偶函数,排除A、D;

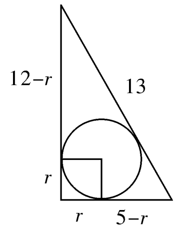
又由当 $0<x<\pi$ 时,$\sin x>0,x>0$,则 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}\sin x>0$,排除B,故选:C.

9. C 【解析】直角三角形的斜边长为 $\sqrt{5^2+12^2}=13$,

设内切圆的半径为 r,则 $5-r+12-r=13$,解得 $r=2$.

内切圆的面积为 $\pi r^2=4\pi$,

豆子落在内切圆外部的概率 $P=1-\dfrac{4\pi}{\frac{1}{2}\times 5\times 12}=1-\dfrac{2\pi}{15}$,故选:C.



10. A 【解析】由题意，$|MF_1|-|MF_2|=2a$，又$|MF_1|=2|MF_2|$，

$\therefore |MF_1|=4a$，$|MF_2|=2a$，

$\therefore \cos\angle F_1MF_2=\dfrac{16a^2+4a^2-4c^2}{2\times 4a\times 2a}=\dfrac{1}{4}$，

化简得：$c^2=4a^2$，即 $a^2+b^2=4a^2$，

$\therefore b^2=3a^2$，得$\dfrac{b}{a}=\pm\sqrt{3}$.

∴此双曲线渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$. 故选：A.

11. A 【解析】在各项都为正数的公比设为 q 的等比数列$\{a_n\}$中，

若 $a_1=2$，且 $a_1a_5=64$，则 $4q^4=64$，解得 $q=2$，则 $a_n=2^n$，

可得数列$\left\{\dfrac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}\right\}$，即为$\left\{\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}\right\}$，

可得$\dfrac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

数列$\left\{\dfrac{a_n}{(a_n-1)(a_{n+1}-1)}\right\}$的前 n 项和是

$\dfrac{1}{2-1}-\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{2^2-1}-\dfrac{1}{2^3-1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，故选：A.

12. A 【解析】由题意，当 $x\leqslant 2$ 时，$f(x)=xe^x$.

$f'(x)=(x+1)e^x$.

①令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$；②令 $f'(x)<0$，解得 $x<-1$；③令 $f'(x)>0$，解得$-1<x\leqslant 2$.

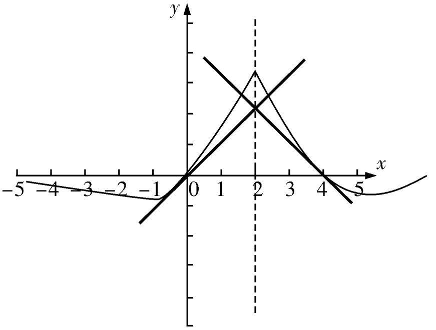
∵$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,2]$上单调递增，

在 $x=-1$ 处取得极小值 $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$. 且 $f(0)=0$；$x\to-\infty$，$f(x)\to 0$.

又∵函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，

∴函数 $f(x)$的图象关于 $x=2$ 对称.

函数 $y=f(x)$的大致图象如下：



而一次函数 $y=k(x-2)+2$ 很明显是恒过定点$(2,2)$.

结合图象，当 $k=0$ 时，有两个交点，不符合题意，

当 $k=1$ 时，有两个交点，其中一个是$(0,0)$. 此时 $y=f(x)$与 $y=k(x-2)+2$ 正好相切.

∴当 $0<k<1$ 时，有三个交点.

同理可得当$-1<k<0$ 时，也有三个交点.

实数 k 的取值范围为：$(-1,0)\cup(0,1)$.

故选：A.

二、填空题

13. $\frac{27}{5}$ 【解析】依题意，$\frac{S_9}{S_5}=\frac{\frac{a_1+a_9}{2}\times 9}{\frac{a_1+a_5}{2}\times 5}=\frac{9a_5}{5a_3}$，

又$\frac{a_5}{a_3}=3$，

$\therefore\frac{S_9}{S_5}=\frac{9}{5}\times 3=\frac{27}{5}$.

14. $x-y-1=0$ 【解析】由 $f(x)=x\ln x$，得 $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$，

$\therefore f'(1)=\ln 1+1=1$，

即曲线 $f(x)=x\ln x$ 在点$(1,0)$处的切线的斜率为 1，

则曲线 $f(x)=x\ln x$ 在点$(1,0)$处的切线方程为 $y-0=1\times(x-1)$，

整理得：$x-y-1=0$. 故答案为：$x-y-1=0$.

15. 7 【解析】$\because f(x)$的图象与 y 轴交点的纵坐标为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore f(0)=\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，

$\because y$ 轴右侧第一个最低点的横坐标为$\frac{\pi}{6}$，$\therefore$由五点对应法得$\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$得 $\omega=7$，

故答案为：7.

16. $\sqrt{6}\pi$ 【解析】根据题意，得三棱锥 $P-ABC$ 中，$AP=2$，$BP=CP=1$，

$\because PA$、PB、PC 两两互相垂直，

三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的直径 $2R=\sqrt{AP^2+BP^2+CP^2}=\sqrt{6}$，

可得三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径为 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

根据球的体积公式，得三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi$，

故答案为$\sqrt{6}\pi$.

三、解答题

17.【解析】(1)(i)经计算，可得下表：(计算结果精确到 0.1)；

印刷册数 x(千册)		2	3	4	5	8
单册成本 y(元)		3.2	2.4	2	1.9	1.7
模型甲	估计值 $\hat{y}_i^{(1)}$	3.1	2.4	2.1	1.9	1.6
	残差 $\hat{e}_i^{(1)}$	0.1	0	-0.1	0	0.1
模型乙	估计值 $\hat{y}_i^{(2)}$	3.2	2.3	2	1.9	1.7
	残差 $\hat{e}_i^{(2)}$	0	0.1	0	0	0

…… 4 分

(ii)计算模型甲的残差平方和为 $Q_1=0.1^2+(-0.1)^2+0.1^2=0.03$，

模型乙的残差平方和为 $Q_2=0.1^2=0.01$， …………………………………………………… 6 分

$\therefore Q_1>Q_2$，模型乙的拟合效果更好； …………………………………………………… 7 分

(2)若二次印刷 10 千册，由(1)可知，单册书印刷成本为 $\frac{6.4}{10^2}+1.6=1.664$(元)，

故二次印刷 10 千册时，印刷厂利润为 $Y=(5-1.664)\times10\times1000=33360$(元). …………………… 12 分

18.【解析】(1)$\because 2\cos A(b\cos C+c\cos B)=\sqrt{3}a$.

由正弦定理可得，$2\cos A(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=\sqrt{3}\sin A$.

$\therefore 2\cos A\sin(B+C)=\sqrt{3}\sin A$，即 $2\cos A\sin A=\sqrt{3}\sin A$，

$\because \sin A\neq0$，$\therefore \cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because A$ 为三角形的内角，

$\therefore A=\frac{\pi}{6}$； …………………………………………………………………………………… 6 分

(2)$\because a=1$，$A=\frac{\pi}{6}$，又$\because \triangle ABC$ 的周长为 $\sqrt{5}+1$，$\therefore b+c=\sqrt{5}$，

由余弦定理可得，$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{b^2+c^2-1}{2bc}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{(b+c)^2-2bc-1}{2bc}=\frac{4-2bc}{2bc}$，

$\therefore bc=\frac{4}{2+\sqrt{3}}=4(2-\sqrt{3})$，

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4(2-3)\times\frac{1}{2}=2-\sqrt{3}$. …………………………… 12 分

19.【解析】(1)证明$\because AD\perp$平面 A_1BC，$BC\subset$平面 A_1BC，

$\therefore AD\perp BC$.

$\because AA_1\perp$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，

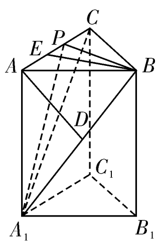
$\therefore AA_1\perp BC$.

又$\because AA_1\cap AD=A$，$AA_1\subset$平面 AA_1B，$AD\subset$平面 AA_1B，

$\therefore BC\perp$平面 AA_1B，$\because A_1B\subset$平面 AA_1B，

$\therefore BC\perp A_1B$. …………………………………………………………………………………… 6 分

(2)设 $PC=x$，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E.



由(1)知 $BC\perp$平面 AA_1B_1B，$\therefore BC\perp AB$，

$\because AB=BC=2$，$\therefore AC=2\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{2}$. $\therefore S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}BE\times CP=\frac{\sqrt{2}}{2}x$，

$\because AD\perp$平面 A_1BC，其垂足 D 落在直线 A_1B 上，

$\therefore AD\perp A_1B$. $\therefore BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=1$，又$\because AA_1\perp AB$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABD\backsim\mathrm{Rt}\triangle A_1BA$，$\therefore \frac{BD}{AB}=\frac{AD}{AA_1}$，

$\therefore AA_1=2\sqrt{3}$.

$\therefore V_{A_1-PBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\times AA_1=\frac{\sqrt{6}}{3}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解得：$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore AP=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \frac{AP}{PC}=3$. …………………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题意可设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

∵椭圆的离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∵$a^2=b^2+c^2$,∴$a=2b$,

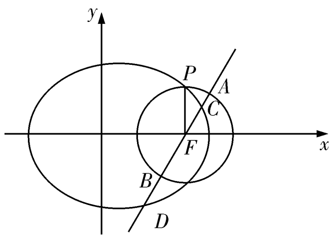
将点$\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$代入椭圆的方程得:$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$,

联立$a=2b$解得:$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$,∴椭圆$E$的方程为:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$,

∴$F(\sqrt{3},0)$,

∵$PF\perp x$轴,∴$P\left(\sqrt{3},\pm\frac{1}{2}\right)$,

∴圆F的方程为:$(x-\sqrt{3})^2+y^2=\frac{1}{4}$; …………………………………………………… 6分



(2)由A、B在圆上得$|AF|=|BF|=|PF|=r=\frac{1}{2}$,设$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$,

$|CF|=\sqrt{(x_1-\sqrt{3})^2+y_1^2}=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1$,同理:$|DF|=2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2$,

若$|AC|=|BD|$,则$|AC|+|BC|=|BD|+|BC|$,即$|AB|=|CD|=1$,

$4-\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1+x_2)=1$,

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\y=k(x-\sqrt{3})\end{cases}$得,$(4k^2+1)x^2-8\sqrt{3}k^2x+12k^2-4=0$,

∴$x_1+x_2=\frac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2+1}$,

∴$4-\frac{12k^2}{4k^2+1}=1$,

得$12k^2=12k^2+3$,无解,故不存在. …………………………………………………………… 12分

21.【解析】(1)当$a=\frac{1}{2}$时,$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{x}-1\right)$,$f''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{x-1}{x^2}$,

当$x\in(0,1)$时,$f''(x)<0$,$f'(x)$的单调递减区间为$(0,1)$;

当$x\in(1,+\infty)$时,$f''(x)>0$,$f'(x)$的单调递增区间为$(1,+\infty)$. ……………………………… 4分

(2)$f'(x)=a\ln x-\frac{(a-1)}{x}+(a-1)=(a-1)\frac{x-1}{x}+a\ln x$,

(i)当$a\geqslant 1$时,$f'(x)>0$,

所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,$f(x)>f(1)=0$,满足条件; ……………………………… 6分

(ii)当$0<a<1$时,$f''(x)=\frac{a}{x}+\frac{(a-1)}{x^2}=\frac{ax-(1-a)}{x^2}$,

由$f''(x)=0$,得$x=\frac{1-a}{a}$,

①当$\frac{1}{2}\leqslant a<1$时,$\frac{1-a}{a}\leqslant 1$,所以$x>\frac{1-a}{a}$时,

$f''(x)>0$,$f'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

又由$f'(1)=0$,所以$f'(x)>0$,即$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以有$f(x)>f(1)=0$,满足条件; ……………………………………………………………… 9分

②当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1-a}{a}>1$，当 $x\in\left(1,\frac{1-a}{a}\right)$ 时，

$f''(x)<0$，$f'(x)$ 在 $\left(1,\frac{1-a}{a}\right)$ 上单调递减，

又由 $f'(1)=0$，所以 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(1,\frac{1-a}{a}\right)$ 上单调递减，

所以有 $f(x)<f(1)=0$，故此时不满足，

故 a 的取值范围为 $a\geqslant\frac{1}{2}$；…………………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)曲线 C 的参数方程 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$ (其中 α 为参数).

转换为直角坐标方程为：$x^2+y^2=2$，

曲线 l 的极坐标方程为 $\sin\theta-k\cos\theta=0(k\in\mathbf{R})$.

转换为直角坐标方程为：$y=kx$. …………………………………………………………………… 5 分

(2)曲线 l 与曲线 C 交于 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 两点，

则：$\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ y=kx,\end{cases}$

整理得：$x^2=\frac{2}{1+k^2}$，

所以：$x_1x_2=-\frac{2}{1+k^2}$，$x_1+x_2=0$，

则：$y_1y_2=-\frac{2k^2}{1+k^2}$，$y_1+y_2=0$，

所以：$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(x_1-1)(x_2-1)+(y_1-2)(y_2-2)=-\frac{2}{1+k^2}+1-\frac{2k^2}{1+k^2}+4=3$. ………… 10 分

23.【解析】(1)∵$f(x)=|x-3|+|3x-3|$，

∴$f(x)>10$ 等价于 $\begin{cases}x>3\\ 4x-6>10\end{cases}$，或 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3\\ 2x>10\end{cases}$，或 $\begin{cases}x<1\\ 6-4x>10\end{cases}$，

解得 $x>4$ 或 $x<-1$，

∴不等式的解集为：$\{x|x>4$ 或 $x<-1\}$；…………………………………………………………… 5 分

(2)对任意 $x_1\in\mathbf{R}$，都存在 $x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，

即 $g(x)$ 的值域包含 $f(x)$ 的值域.

$f(x)=|x-3|+|3x-3|=\begin{cases}4x-6,x>3\\ 2x,1\leqslant x\leqslant 3,\\ 6-4x,x<1\end{cases}$

由 $f(x)$ 图象可得 $x=1$ 时，$f(x)_{\min}=2$，

∴$f(x)$ 的值域为 $[2,+\infty)$.

$g(x)=|4x-a|+|4x+2|\geqslant|(4x-a)-(4x+2)|=|a+2|$，

当且仅当 $4x-a$ 与 $4x+2$ 异号时取等，

∴$g(x)$ 的值域为 $[|a+2|,+\infty)$，

则由 $[2,+\infty)\subseteq[|a+2|,+\infty)$，

得 $|a+2|\leqslant 2$，∴$-4\leqslant a\leqslant 0$，

∴实数 a 的取值范围为：$[-4,0]$. ……………………………………………………………………… 10 分