2019年欧洲杯数学奥林匹克(高中组)

1. 对正整数a,b,用$M(a,b)$表示它们的最大公约数,求所有的正整数对(m,n),使得对任意一对满足$x|m$,$y|n$的正整数x,y,均有$M(x+y,mn)>1$.

解:不存在符合题意的正整数对(m,n).

假设存在符合题意的正整数对(m,n).

将满足$P|m$且$P\nmid n$的素数P称为"好素数".设所有好素数之积为P',若不存在好素数,令$P'=1$.则$M(P',n)=1$,$P'|m$.

取$x=P'$,$y=n$.我们有$M(P'+n,mn)>1$.

因为$M(P'+n,n)=M(P',n)=1$.

所以$M(P'+n,mn)=M(P'+n,m)>1$.

故存在素数q,满足$q|P'+n$且$q|m$.

由$M(P',n)=1$可知$q\nmid P'$,$q\nmid n$.而$q|m$,即q为好素数.

于是$q|P'$这与$q\nmid P'$矛盾.故假设不成立!

2. 已知n为正整数，把$n\times n$的方格表的某些小方格染黑，其余小方格染白。若每个黑色的小方格左侧的小方格（如果有的话）和正上方的小方格（如果有的话）均为黑色，则称这个方格表为“凸”的。若有两个小方格同行或同列但不同色，则称这两个小方格是一对“美”的。把方格表中“美”对的总个数称为该方格表的“美观度”，求一个“凸”的$n\times n$方格表的“美观度”的最大值。

解：考虑任意一个“凸”的$n\times n$方格表，用a_i表示第i行（从上向下）中黑格的个数。定义$a_0=n$，$a_{n+1}=0$。则所有行的“美”对共有$\sum_{i=1}^{n}a_i(n-a_i)$个。

由题设条件可知，该方格表中至少有i个黑格的列数等于a_i。

而恰有i个黑格的列数等于至少有i个黑格的列数与至少有$i+1$个黑格的列数之差。因此，恰好有i个黑格的列数等于a_i-a_{i+1}。

从而所有列的“美”对共有$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})i(n-i)$个。

故“美观度”为$\sum_{i=1}^{n}a_i(n-a_i)+\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i+1})i(n-i)$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i[(n-a_i)+i(n-i)-(i-1)(n+1-i)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_i(2n+1-2i-a_i)$$

当$a_i\in\{n-i,n-i+1\}$时，$a_i(2n+1-2i-a_i)$取最大值，是$(n-i)(n-i+1)$。

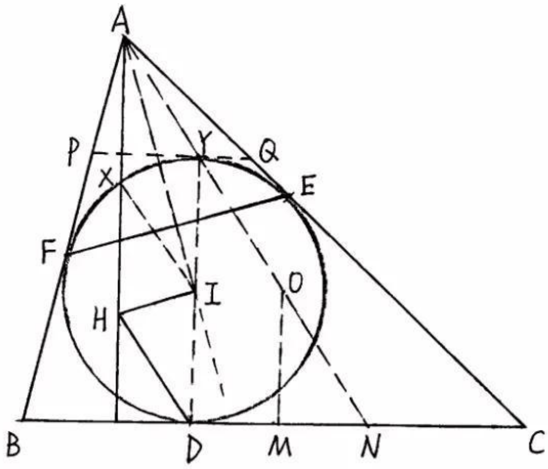
于是$\sum_{i=1}^{n}a_i(2n+1-2i-a_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}(n-i)(n-i+1)=\sum_{j=1}^{n}j(j-1)=\sum_{j=1}^{n}j^2-\sum_{j=1}^{n}j$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n^3-n}{3}$。

当第i行（从上向下）的前$n-i$个方格为黑格（$i=1,2,\cdots,n$），其余方格为白格时，“美观度”可达到$\frac{n^3-n}{3}$。

综上所述，“凸”的$n\times n$方格表的“美观度”的最大值是$\frac{n^3-n}{3}$。

3. 在锐角△ABC中，$AB\neq AC$. I为内心，O为外心. 其内切圆与三边BC、CA、AB分别切于点D、E、F. 过I作EF的平行线l_1，过D作AO的平行线l_2，过A作BC边上的高l_3. 若l_1, l_2, l_3三线共点，求证：该公共点是△ABC的垂心.



证明：设l_1, l_2, l_3三线交于点H. 则$IH\parallel EF$, $DH\parallel AO$, $AH\perp BC$.

$\because AI\perp EF$, $IH\parallel EF$.

$\therefore AI\perp IH$.

不妨设$AB<AC$，

则$\angle IAH=\angle IAO=\frac{\angle B-\angle C}{2}$.

$\because \angle DIH=\angle AID-90^\circ=180^\circ-\angle IAH-90^\circ=90^\circ-\frac{\angle OAH}{2}=90^\circ-\frac{\angle HDI}{2}$.

$\therefore$ △DIH是等腰三角形，其中$DI=DH$.

作D关于HI的对称点为X. 则由$IX=ID$可知$X\in\odot I$.

$\because \angle XHD=2\angle DHI=180^\circ-\angle IDH$ $\therefore XH\parallel ID$ 即X在AH上.

于是在Rt△AIH中，X在斜边AH上，且$XH=DH=DI=XI$. 故X是AH的中点.

设DI的延长线交⊙I于点Y.

$\because \angle XIA=90^\circ-\angle XIH=90^\circ-\angle DIH=\angle YIA$.

$\therefore$ X与Y关于AI对称.

又由$\angle XAI=\angle OAI$可知Y在AO上，即A、Y、O三点共线.

过Y作BC的平行线交AB、AC分别于点P、Q. 设BC的中点为M，AO与BC交于点N.

$\because PQ \parallel BC$ $\therefore \triangle APQ$与$\triangle ABC$位似，且位似中心为A.

由Y、N是一对对应点，且Y是$\triangle APQ$关于$\angle A$的旁切圆$\odot I$与PQ的切点，可知：N是$\triangle ABC$关于$\angle A$的旁切圆与BC的切点.

故$CN=\dfrac{AB+BC-CA}{2}=BD$.

又$\because M$是AB的中点，$\therefore M$也是DN的中点.

$\because YD\perp BC$，$OM\perp BC$. $\therefore YD\parallel OM$. 即$OM$是$\triangle NDY$的中位线.

于是$AH=2XH=2XI=YD=2OM$.

又由$AH\perp BC$且H在$\triangle ABC$的内部，可知H是$\triangle ABC$的垂心.

4. 求所有的函数 $f:R\to R$，使得对任意的 $x,y\in R$，均有
$f(x)+f(yf(x)+f(y))=f(x+2f(y))+xy$. (1)

解：先证明 f 是单射.

假设存在 $a.b\in R$, $a\neq b$. 满足 $f(a)=f(b)$.

在(1)中取 $x=a$ 可得 $f(a)+f(yf(a)+f(y))=f(a+2f(y))+ay$, $\forall y\in R$.

在(1)中取 $x=b$ 可得 $f(b)+f(yf(b)+f(y))=f(b+2f(y))+by$, $\forall y\in R$.

上面两式相减可得 $f(a+2f(y))-f(b+2f(y))=(b-a)y$, $\forall y\in R$.

于是, $(b-a)a=f(a+2f(a))-f(b+2f(a))$
$=f(a+2f(b))-f(b+2f(b))$
$=(b-a)b$. 即 $a=b$ 矛盾!

故 f 是单射.

再证明 f 是满射.

在(1)中取 $x=-f(0)$, $y=0$ 可得 $f(C)=0$, 其中 $C=-f(0)$.

在(1)中取 $x=y=C$ 可得 $f(0)=C^2$. 即 $-C=C^2\Rightarrow C\in\{0,-1\}$.

亦即 $f(0)\in\{0,1\}$.

若 $f(0)=0$. 在(1)中取 $x=0$ 得 $f(f(y))=f(2f(y))$, $\forall y\in R\Rightarrow f\equiv 0$, 这显然是不可能的. 于是, $f(0)=1$, 从而 $f(-1)=0$.

在(1)中取 $y=-1$ 可得 $f(-f(x))=-x$, $\forall x\in R$. 故 f 是满射.

在(1)中取 $y=0$ 可得 $f(x)+f(1)=f(x+2)$, $\forall x\in R$. (2)

在(1)中用 $x+2$ 代替 x 可得 $f(x+2)+f(yf(x+2)+f(y))=f(x+2+2f(y))+(x+2)y$, $\forall x,y\in R$. (3)

(3)-(1), 并利用(2)可得 $f(1)+f(yf(x)+f(y)+yf(1))-f(yf(x)+f(y))$
$=f(x+2+2f(y))-f(x+2f(y))+2y=f(1)+2y$.

即 $f(yf(x)+f(y)+yf(1))-f(yf(x)+f(y))=2y$，$\forall y\in R$.

$\because f$是满射，$\therefore$对任意实数 $y\neq 0$，存在 $x\in R$，使得 $f(x)=-\frac{f(y)}{y}$.

因此 $f(yf(1))-f(0)=2y$，$\forall y\in R$（对于 $y=0$，此式也成立）.

即 $f(yf(1))=2y+1$，$\forall y\in R$. (4)

在(4)中取 $y=-\frac{1}{2}$，可得 $f(-\frac{1}{2}f(1))=0=f(-1)$，又由 f 是一一映射

可知 $-\frac{1}{2}f(1)=-1$，即 $f(1)=2$.

故 $f(2y)=2y+1$，$\forall y\in R$. (5)

在(5)中取 $y=\frac{x}{2}$，可得 $f(x)=x+1$，$\forall x\in R$.

容易验证 $f(x)=x+1$ 满足(1)式.

综上所述，所求 $f(x)=x+1$.