# 2023届普通高等学校招生全国统一考试
# 青桐鸣大联考(高三)答案

## 数学(理科)

1. D 【解析】因为 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid |x|<3\}=\{0,1,2\}$，$B=\{x\mid -2<x\leqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\{0,1\}$. 故选 D.

2. C 【解析】由 $z=(1-2\mathrm{i})(1+b\mathrm{i})=1+2b+(b-2)\mathrm{i}$，得 $\bar{z}=1+2b+(2-b)\mathrm{i}=7-\mathrm{i}$，所以 $1+2b=7,2-b=-1$，解得 $b=3$. 故选 C.

3. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，$a_4+a_{10}=14$，$a_2+a_9=11$，两式相减可得 $3d=3$，解得 $d=1$，$a_1=1$，则 $a_6+a_{11}=17$. 故选 C.

4. A 【解析】如 1,3,17 的平均数为 7，去掉其中的最小值 1 和最大值 17 后的平均数为 3，所以 A 不一定正确；
去掉最小值和最大值后，数据相对更集中，方差变小，所以 B 一定正确；去掉最小值和最大值后，极差变小，所以 C 正确；去掉最小值和最大值后，中位数不会改变，故 D 正确. 故选 A.

5. C 【解析】设棱台 $ABCD-A'B'C'D'$ 的外接球的球心为 $O$，半径为 $R$，上底面外接圆圆心为 $O_1$，下底面外接圆圆心为 $O_2$，
由题意得，$O_1O_2=1,AO_2=2,A'O_1=1,OA=OA'=R$，
当球心 $O$ 位于棱台外部时，设 $OO_2=h$，则在 $\triangle AOO_2$ 中，有 $R^2=h^2+4$，在 $\triangle A'OO_1$ 中，有 $R^2=(h+1)^2+1$，
解得 $h=1,R=\sqrt{5}$，所以该"刍童"外接球的体积为 $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$；
当球心 $O$ 位于棱台内部时，不符合题意. 故选 C.

6. B 【解析】由已知可得 $f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1)-f(1)$，则 $f(1)=0$，
又 $f\left(\frac{1}{-1}\right)=f(1)-f(-1)$，得 $f(-1)=0$，所以 $f\left(\frac{x}{-1}\right)=f(x)-f(-1)$，即 $f(-x)=f(x)$，
因为函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，所以函数 $f(x)$ 为偶函数. 若 $f(x)$ 也是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)=f(x)$，则 $f(x)=0$，与 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$，矛盾. 故选 B.

7. A 【解析】由题可知 $F(0,1)$，直线 $l$ 的斜率一定存在，设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，
由 $\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$，
故 $x_1x_2=-4$，又 $y_1=\frac{x_1^2}{4},y_2=\frac{x_2^2}{4}$，
所以 $y_1y_2=\frac{(x_1x_2)^2}{16}$，
圆 $x^2+y^2-2y=0$ 的圆心为 $F(0,1)$，半径 $r=1$，
所以 $|AM|=|AF|-r=|AF|-1$，$|BN|=|BF|-r=|BF|-1$，
又 $|AF|=y_1+1$，$|BF|=y_2+1$，
所以 $|AM|=y_1+1-1=y_1$，$|BN|=y_2+1-1=y_2$，
$|AM|\cdot|BN|=y_1y_2=\frac{(x_1x_2)^2}{16}=1$. 故选 A.

8. D 【解析】由 $x+\mathrm{e}^x=3$ 得 $\mathrm{e}^x=3-x$，由 $x+\ln x=3$ 得 $\ln x=3-x$，
函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，
函数 $y=3-x$ 的图象也关于直线 $y=x$ 对称，
根据图象得 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}$，故 $x_1+x_2=a+b=3$，所以 $\frac{a^2+b^2+2ab}{9}=1$，
又 $\frac{7b^2+1}{ab}=\frac{7b}{a}+\frac{1}{ab}=\frac{7b}{a}+\frac{a^2+b^2+2ab}{9ab}=\frac{64b}{9a}+\frac{a}{9b}+\frac{2}{9}\geqslant 2$，当且仅当 $a=\frac{8}{3},b=\frac{1}{3}$ 时等号成立.
故选 D.

9. A 【解析】由题意得 $f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)\left(\tan\varphi=\frac{b}{a}\right)$，
又因为 $f(x)\geqslant f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ 恒成立，所以 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$，
所以 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=0$，故①正确；

$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$既不是奇函数也不是偶函数，故②错误；

$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$的单调递减区间是$\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$，$k\in\mathbf{Z}$，故③错误；

假设存在经过点$(a,b)$的直线与函数$f(x)$的图象不相交，则此直线与$x$轴平行，且$b>\sqrt{a^2+b^2}$，$ab\neq0$，这显然不可能，假设错误，故④正确．故选A.

10. C 【解析】设直线$l$与圆$O$的切点为$P$，易知$OP=a$，$OF_1=c$，$F_1P=b$，则直线$OP$的斜率为$-\frac{b}{a}$，所以点$P$与点$A$(或点$B$)重合(假设与点$A$重合)，若$|AB|=\sqrt{3}a$，在Rt$\triangle AOB$中，$|OA|=a$，$|AB|=\sqrt{3}a$，则$|OB|=2a$，当点$B$，$A$分别在第一、二象限时(如图1)，

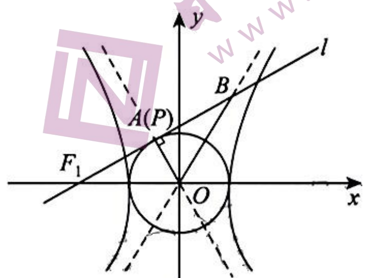



图1

$\angle AOB=60°$，则$\angle BOx=60°$，$\frac{b}{a}=\tan 60°=\sqrt{3}$，双曲线的离心率$e=2$；

当点$A$，$B$分别在第二、三象限时(如图2)，

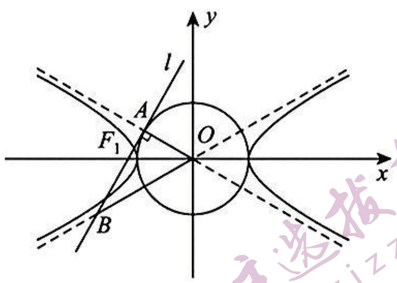



图2

$\angle AOB=60°$，则$\angle BOF_1=30°$，$\frac{b}{a}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．故选C.

11. B 【解析】根据题意，构造函数$\varphi(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则$\varphi'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，因为$f'(x)<f(x)$，所以$\varphi'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}<0$，故函数$\varphi(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，所以$\frac{f(0)}{e^0}>\frac{f(a)}{e^a}>\frac{f(1)}{e^1}$，

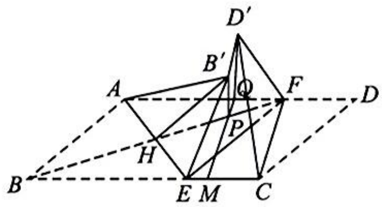
故$e^a f(0)>f(a)$，又$0<a<1$，所以$3>e^1>e^a$，所以$3f(0)>e^a f(0)>f(a)$，所以$3f(0)>f(a)$；

又$\frac{f(a)}{e^a}>\frac{f(1)}{e^1}$，所以$f(a)>e^{a-1}f(1)$，

设$p(a)=e^{a-1}-a$，$0<a<1$，则$p'(a)=e^{a-1}-1<0$，所以函数$p(a)$在$(0,1)$上单调递减，所以当$0<a<1$时，$p(a)=e^{a-1}-a>p(1)=1-1=0$，故$e^{a-1}>a$，所以$f(a)>e^{a-1}f(1)>af(1)$，综上$3f(0)>f(a)>af(1)$.

故选B.

12. C 【解析】连接$BF$，交$AE$于点$H$，如图，




由$AB=BE=AF=2$，且$\angle ABC=60°$可得$\triangle AB'E$和$\triangle AFE$均为等边三角形，且$BF\perp AE$，故$B'H\perp AE$，$FH\perp AE$，$B'H=BH=\sqrt{3}$，

由题意得$\triangle CD'F$为直角三角形且$CE\perp AD$，$DF=D'F=1$，

设二面角$B'-AE-F$的大小为$\theta_1$，二面角$D'-FC-E$的大小为$\theta_2$，$B'$点在底面的投影为$P$点，$D'$点在底面的投影为$Q$点，显然$Q$在线段$AF$上，$P$在线段$HF$上，且$QF=\cos\theta_2$，$D'Q=\sin\theta_2$.

易知$\angle PBC=30°$，$\angle B'HP=\theta_1$，连接$QP$并延长交$BC$于点$M$，由$B'D'/\!/CF$，$CF\perp AD$，$AD/\!/BC$，得$B'D'\perp BC$，则$QM\perp BC$，

易知，$BM=BC-CM=BC-QF$，

所以$BP=\frac{BM}{\cos 30°}=\frac{BC-QF}{\cos 30°}=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta_2$，

$HP=BP-BH=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta_2-\sqrt{3}=\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta_2$，易知四边形$B'PQD'$为矩形，

所以$B'P=B'H\sin\theta_1=QD'=\sin\theta_2$，即$\sqrt{3}\sin\theta_1=\sin\theta_2$①，

$\frac{HP}{HB'}=\cos\theta_1$，即$\frac{\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\theta_2}{\sqrt{3}}=\cos\theta_1$②，

联立①②，根据同角三角函数基本关系式，解得 $\cos\theta_2=6-\sqrt{33}$，

$B'D'=PQ=QF\tan 30^\circ=\cos\theta_2\cdot\tan 30^\circ=2\sqrt{3}-\sqrt{11}$. 故选 C.

13. 1 【解析】由题意得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,3)$，$\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(1-2\lambda,2-\lambda)$，因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$，所以 $3\times(1-2\lambda)+3\times(2-\lambda)=0$，解得 $\lambda=1$.

14. $-\dfrac{2}{5}$ 【解析】根据题意，$2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=\dfrac{2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2\times\dfrac{1-\tan^2\alpha+\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=2\times\dfrac{1-4+2}{4+1}=-\dfrac{2}{5}$.

15. 336 【解析】先排列两个歌唱、一个小品和一个相声这四个节目，当两个歌唱不相邻时，有 $A_2^2A_3^2$ 种排法，再插入两个舞蹈，有 $A_2^2A_3^2A_5^2$ 种；当两个歌唱相邻时，有 $A_3^3A_2^2$ 种排法，再插入两个舞蹈，有 $A_3^3A_2^2C_2^1C_4^1$ 种，所以共有 $A_2^2A_3^2A_5^2+A_3^3A_2^2C_2^1C_4^1=336$ 种不同的演出顺序.

16. $15-\sqrt{5}$ 【解析】由题可知点 $A(0,1)$，又因为 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{AQ}(\lambda\in\mathbf{R})$，所以 $P,A,Q$ 三点共线，且 $P,Q$ 为过点 $A$ 的直线与圆 $O$ 的两交点，则 $\dfrac{|2x_1+y_1+7|}{\sqrt{5}}+\dfrac{|2x_2+y_2+7|}{\sqrt{5}}$ 的几何意义为 $P,Q$ 两点到直线 $2x+y+7=0$ 的距离之和.

设线段 $PQ$ 的中点为 $(x_0,y_0)$，则 $2x_0=x_1+x_2$，$2y_0=y_1+y_2$，

所以 $\dfrac{|2x_1+y_1+7|}{\sqrt{5}}+\dfrac{|2x_2+y_2+7|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2|2x_0+y_0+7|}{\sqrt{5}}$.

$P,Q$ 点在圆 $O$ 上，则 $x_1^2+y_1^2=4$，$x_2^2+y_2^2=4$，两式作差可得 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{x_0}{y_0}$，

则 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{x_0}{y_0}=\dfrac{y_0-1}{x_0}$，得 $x_0^2+\left(y_0-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，

由此可知 $PQ$ 中点的轨迹是以 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 为圆心，$\dfrac{1}{2}$ 为半径的圆，

则点 $(x_0,y_0)$ 到直线 $2x+y+7=0$ 的距离的最小值为 $\dfrac{\left|2\times0+\dfrac{1}{2}+7\right|}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{5}-1}{2}$，

所以 $|2x_1+y_1+7|+|2x_2+y_2+7|=2\sqrt{5}\times\dfrac{3\sqrt{5}-1}{2}=15-\sqrt{5}$.

17. 解：(1) 已知 $\sqrt{2}a\sin C=c\tan A$，由正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A\sin C=\dfrac{\sin C\sin A}{\cos A}$， (2 分)

因为 $A,C\in(0,\pi)$，则 $\sin A\sin C\neq0$，原式化简得 $\cos A=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $A=\dfrac{\pi}{4}$. (4 分)

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，由 $a=2$，$A=\dfrac{\pi}{4}$ 及余弦定理得，

$4=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$， (6 分)

根据基本不等式得，$b^2+c^2=4+\sqrt{2}bc\geqslant 2bc$，则 $bc\leqslant4+2\sqrt{2}$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立. (8 分)

又 $D$ 为 $BC$ 的中点，所以 $\overrightarrow{AD}^2=\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)^2=\dfrac{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{4}=\dfrac{c^2+b^2+\sqrt{2}bc}{4}=\dfrac{\sqrt{2}bc+2}{2}\leqslant2\sqrt{2}+3$， (11 分)

所以 $|\overrightarrow{AD}|_{\max}=\sqrt{2\sqrt{2}+3}=\sqrt{2}+1$，即 $AD$ 长度的最大值为 $\sqrt{2}+1$. (12 分)

18. 解：(1) 根据列联表，可得 $K^2=\dfrac{100\times(30\times40-20\times10)^2}{40\times60\times50\times50}=\dfrac{50}{3}\approx16.667>6.635$. (3 分)

因此，有 99% 的把握认为用 $A$ 药物与小于 10 天康复有关. (4 分)

(2) 由题意甲组用 $A$ 药物而 10 天后康复的频率为 $\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}$，

所以 $A$ 药物无效的概率为 $\dfrac{2}{5}$， (6 分)

随机变量 $X$ 的可能取值为 0,1,2,3,4，由题意得 $X\sim B\left(4,\dfrac{2}{5}\right)$. (7 分)

$P(X=k)=C_4^k\left(\dfrac{2}{5}\right)^k\left(1-\dfrac{2}{5}\right)^{4-k}$，$k=0,1,2,3,4$. (9 分)

故 $X$ 的分布列如下：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\dfrac{81}{625}$ | $\dfrac{216}{625}$ | $\dfrac{216}{625}$ | $\dfrac{96}{625}$ | $\dfrac{16}{625}$ |

(11 分)

数学期望 $E(X)=np=4\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{5}$. (12 分)

19. 解：(1) 证明：直棱柱中侧棱垂直于底面，所以四边形 $DD_1A_1A$ 为矩形，

设 $AA_1=\sqrt{3}AD=\sqrt{3}$，则 $AM=\frac{AA_1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{D_1D}{AD}=\frac{AD}{AM}=\sqrt{3}$，又 $\angle MAD=\angle ADD_1=90°$，

所以 $\mathrm{Rt}\triangle MAD\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADD_1$，故 $\angle D_1AD=\angle DMA$，又 $\angle DMA+\angle MDA=90°$，所以 $\angle D_1AD+\angle MDA=90°$，所以 $D_1A\perp MD$， (2 分)

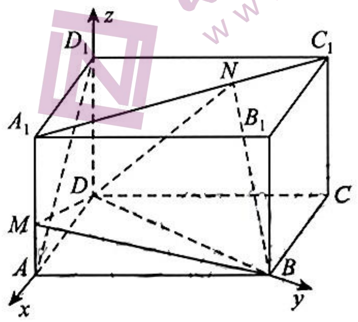
因为 $AD_1\perp BM$，$DM\cap BM=M$，$DM,BM\subset$ 平面 $BDM$，所以 $AD_1\perp$ 平面 $BDM$， (3 分)

因为 $BD\subset$ 平面 $BDM$，所以 $AD_1\perp BD$，

由已知可得 $DD_1\perp$ 底面 $ABCD$，$BD\subset$ 底面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp BD$，$DD_1\cap AD_1=D_1$，$DD_1,AD_1\subset$ 平面 $DD_1A_1A$，

所以 $BD\perp$ 平面 $DD_1A_1A$. (5 分)

(2)由(1)可知 $DA,DB,DD_1$ 两两互相垂直，所以以 $DA,DB,DD_1$ 所在直线分别为 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$，如图，




设 $AD=1$，则 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$D_1(0,0,\sqrt{3})$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$A_1(1,0,\sqrt{3})$，$C_1(-1,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

又 $A_1N=2NC_1$，所以 $N\left(-\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{DN}=\left(-\frac{1}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{DB}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,\sqrt{3})$， (7 分)

设平面 $BDN$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DN}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y=0,\\ \frac{1}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，得 $y=0,x=3\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=(3\sqrt{3},0,1)$. (9 分)

由(1)知 $AD_1\perp$ 平面 $BDM$，则 $\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,\sqrt{3})$ 是平面 $BDM$ 的一个法向量， (10 分)

$|\cos\langle\overrightarrow{AD_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{AD_1}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{28}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$， (11 分)

则 $\sin\langle\overrightarrow{AD_1},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，

故二面角 $M-BD-N$ 的正弦值为 $\frac{5\sqrt{7}}{14}$. (12 分)

20. 解：(1)由题可知 $|CD|=|CE|$，$|CF|+|CE|=4\sqrt{2}$，

所以 $|CD|+|CF|=4\sqrt{2}>2\sqrt{6}$， (2 分)

由椭圆的定义可知点 $C$ 的轨迹是以 $D,F$ 为焦点的椭圆，$2a=4\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}$，

所以 $a^2=8,c^2=6$，所以 $b^2=2$， (3 分)

则点 $C$ 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. (4 分)

(2)由(1)知点 $A(2,1)$，$B(-2,-1)$ 都在点 $C$ 的轨迹上，根据题意，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$MN$ 的中点为 $Q(x_0,y_0)$，直线 $l:y=\frac{1}{2}x+m(m\neq0)$，

将直线 $l$ 的方程与 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立得 $x^2+2mx+2m^2-4=0$，

$\Delta=4m^2-4(2m^2-4)>0$，得 $-2<m<2$ 且 $m\neq0$，

$x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-4$， (5 分)

所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-m$，$y_0=\frac{1}{2}x_0+m=\frac{m}{2}$，所以 $k_{OQ}=\frac{y_0}{x_0}=-\frac{1}{2}$. (6 分)

因为 $k_{AM}=\frac{y_1-1}{x_1-2}=\frac{\frac{1}{2}x_1+m-1}{x_1-2}=\frac{1}{2}+\frac{m}{x_1-2}$，

$k_{BN}=\frac{y_2+1}{x_2+2}=\frac{\frac{1}{2}x_2+m+1}{x_2+2}=\frac{1}{2}+\frac{m}{x_2+2}$，

所以直线 $AM$ 的方程为 $y-1=\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{x_1-2}\right)(x-2)$，即 $y=\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{x_1-2}\right)x-\frac{2m}{x_1-2}$， (7 分)

直线 $BN$ 的方程为 $y+1=\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{x_2+2}\right)(x+2)$，

即 $y=\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{x_2+2}\right)x+\frac{2m}{x_2+2}$， (8 分)

联立直线 $AM$ 与直线 $BN$ 的方程，得 $\left(\frac{m}{x_1-2}-\frac{m}{x_2+2}\right)x=\frac{2m}{x_1-2}+\frac{2m}{x_2+2}$，

得 $x_P=-\frac{2(x_1+x_2)}{x_1-x_2-4}$，$y_P=\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{x_1-2}\right)x_P-$

$\dfrac{2m}{x_1-2}$, (9 分)

$\dfrac{y_P}{x_P}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{m}{x_1-2}\right)+\dfrac{2m}{x_1-2}\cdot\dfrac{x_1-x_2-4}{2(x_1+x_2)}=\dfrac{1}{2}+m\cdot\dfrac{(x_1+x_2)+(x_1-x_2-4)}{(x_1-2)(x_1+x_2)}=\dfrac{1}{2}+m\cdot\dfrac{2x_1-4}{(x_1-2)(x_1+x_2)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2m}{x_1+x_2}=-\dfrac{1}{2}$. (11 分)

所以 $k_{OP}=\dfrac{y_P}{x_P}=-\dfrac{1}{2}$，因为 $k_{OQ}=\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $O,Q,P$ 三点共线，即直线 $OP$ 平分线段 $MN$. (12 分)

21. 解：(1) 由题意得，$x>0$，

$f'(x)=a\ln x+\dfrac{1}{x}+a$， (1 分)

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{ax-1}{x^2}$， (2 分)

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)<0$，所以函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，在区间 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上，$g'(x)<0$，则函数 $f'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上，$g'(x)>0$，则函数 $f'(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减； (3 分)

当 $a>0$ 时，函数 $f'(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增. (4 分)

(2) 证明：当 $a=1$ 时，$f(x)=(x+1)\ln x$，

要证 $x(e^x+1)>f(x)+1$，即证 $xe^x>1-x+(x+1)\ln x$， (5 分)

当 $0<x\leqslant 1$ 时，显然 $xe^x>0$，

设 $m(x)=1-x+(x+1)\ln x$，

则 $m'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，又 $m''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$m''(x)\leqslant 0$，函数 $m'(x)$ 单调递减， (6 分)

故 $m'(x)\geqslant m'(1)=1>0$，所以函数 $m(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递增，故 $m(x)\leqslant m(1)=0$， (7 分)

所以在区间 $(0,1]$ 上 $xe^x>0\geqslant m(x)$，即 $xe^x>1-x+(x+1)\ln x$ 成立，

故 $xe^x+x>(x+1)\ln x+1$，所以 $x(e^x+1)>f(x)+1$ 成立； (8 分)

当 $x>1$ 时，设 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)=\ln x-x+1<h(1)=0$，即 $\ln x<x-1$，故 $x^2-1>(x+1)\ln x$， (9 分)

设函数 $r(x)=e^x-x-1$，则 $r'(x)=e^x-1$，

当 $x>1$ 时，$r'(x)>0$，所以 $r(x)$ 单调递增，故 $r(x)=e^x-x-1>r(1)>0$，即 $e^x>x+1$，

得 $xe^x>x^2+x$， (10 分)

故 $xe^x+x-1>x^2+2x-1>x^2-1>(x+1)\ln x$，

所以 $x(e^x+1)>(x+1)\ln x+1$ 成立，所以 $x(e^x+1)>f(x)+1$ 成立. (11 分)

综上，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，不等式 $x(e^x+1)>f(x)+1$ 恒成立. (12 分)

22. 解：(1) 由 $\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=\sqrt{2}\sin\alpha,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{2}\cos\alpha=x-2,\\ \sqrt{2}\sin\alpha=y,\end{cases}$

两式平方相加得 $(x-2)^2+y^2=2$， (2 分)

又 $x^2+y^2=\rho^2$，$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

则曲线 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+2=0$. (4 分)

(2) $l$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\sqrt{2}t,\\ y=2+\sqrt{2}t\end{cases}$ ($t$ 为参数)，消去 $t$ 得 $y=x$， (5 分)

所以 $l$ 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$， (6 分)

设 $A\left(\rho_1,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$B\left(\rho_2,\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $\rho_1^2-2\sqrt{2}\rho_1+2=(\rho_1-\sqrt{2})^2=0$，得 $\rho_1=\sqrt{2}$， (7 分)

$\rho_2=\dfrac{4\cos\dfrac{\pi}{4}}{\sin^2\dfrac{\pi}{4}}=4\sqrt{2}$， (8 分)

故 $|AB|=|\rho_2-\rho_1|=|4\sqrt{2}-\sqrt{2}|=3\sqrt{2}$. (10 分)

23. 解：(1) $f(x)=\left|x+\dfrac{3}{a}\right|+|x-a|\geqslant\left|x+\dfrac{3}{a}-(x-a)\right|=\left|a+\dfrac{3}{a}\right|\geqslant 4$， (2 分)

当 $a>0$ 时，$\left|a+\dfrac{3}{a}\right|=a+\dfrac{3}{a}\geqslant 4$，所以 $a^2-$

$4a+3\geqslant 0$,解得 $0<a\leqslant 1$ 或 $a\geqslant 3$; (3 分)

当 $a<0$ 时,$\left|a+\frac{3}{a}\right|=-a-\frac{3}{a}\geqslant 4$,所以 $a^2+4a+3\geqslant 0$,解得 $a\leqslant -3$ 或 $-1\leqslant a<0$. (4 分)

综上,实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,-3]\cup[-1,0)\cup(0,1]\cup[3,+\infty)$. (5 分)

(2) 证明:由(1)知当 $a\in(-\infty,-3]\cup[-1,0)\cup(0,1]\cup[3,+\infty)$ 时,$f(x)\geqslant 4$ 恒成立,所以 $f(3)\geqslant 4$ 成立; (6 分)

当 $a\in(-3,-1)\cup(1,3)$ 时,$f(3)=\left|3+\frac{3}{a}\right|+|3-a|=6+\frac{3}{a}-a$, (7 分)

设函数 $g(a)=6+\frac{3}{a}-a$,

当 $1<a<3$ 时,函数 $g(a)$ 单调递减,故 $g(a)>g(3)=4$,

所以当 $1<a<3$ 时,$f(3)>4$; (8 分)

当 $-3<a<-1$ 时,函数 $g(a)$ 单调递减,故 $g(a)>g(-1)=4$,

所以当 $-3<a<-1$ 时,$f(3)>4$. (9 分)

综上,$f(3)\geqslant 4$. (10 分)