

河北省“五个一”名校联盟
2023 届高三年级联考（2022.12）

数学试卷

命题单位：石家庄市第一中学

（满分：150 分，测试时间：120 分钟）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -1 < 2^x < 2, x \in R\}$ ，集合 $B = \{x | -1 < \log_2 x < 2, x \in R\}$ ，则集合 $A \cap B =$ ()

- A. $\{x | 0 < x < 1\}$ B. $\{x | x < 1\}$ C. $\{x | \frac{1}{2} < x < 1\}$ D. $\{x | x < 4\}$

2. 已知 $(3+i)z = 4+i$ ，其中 i 为虚数单位，则 z 的虚部是 ()

- A. $\frac{13}{10}$ B. $-\frac{1}{10}$ C. $\frac{13}{10}i$ D. $-\frac{1}{10}i$

3. 已知 $p: x \neq 3$ 或 $y \neq 7$ ， $q: xy \neq 21$ ，则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，左、右焦点分别为 F_1, F_2 ， O 为坐标原点， P 为右支上一点，

且 $|OP| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， O 到直线 PF_2 的距离为 b ，则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

5. 已知 $x > 0, y > 0$ ，且 $xy = 1$ ，则 $\frac{x^3 + 2}{x} + \frac{4y^3 + 1}{y}$ 的最小值为 ()

- A. $2 + 2\sqrt{2}$ B. 4 C. $4 + \sqrt{2}$ D. $4 + 2\sqrt{2}$

6. 设异面直线 a, b 所成的角为 50° ，经过空间一定点 O 有且只有四条直线与直线 a, b 所成的角均为 θ ，则 θ

可以是下列选项中的 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{\pi}{2}$

7. 设 $a = \frac{12}{13}$ ， $b = \ln \frac{7}{4}$ ， $c = \sin \frac{4}{3}$ ，那么以下正确的是 ()

- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

8. 已知点列 P_n 在 $\triangle ABC$ 内部, $\triangle ABP_n$ 的面积与 $\triangle ACP_n$ 的面积比为 $\frac{1}{3}$, 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 若存在数列 $\{\lambda_n\}$ 使得对 $\forall n \in N^*$, $\overrightarrow{AP_n} = 3\lambda_n a_n \overrightarrow{AB} + (4\lambda_n a_{n-1} + 3\lambda_n) \overrightarrow{AC}$ 都成立, 那么 $a_4 =$ ()

- A. 15 B. 31 C. 63 D. 127

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 有选错的得 0 分. 全科免费下载公众号《高中僧课堂》

9. 下列说法错误的是 ()

A. 甲乙丙丁四个人排队, 事件 A : 甲不在排头, 事件 B : 乙不在排尾, 那么 $P(B|A) = \frac{7}{9}$;

B. 若随机变量 ξ 服从二项分布 $B(100, 0.6)$, 则 $P(\xi = 0) = 0.6^{100}$;

C. 若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(100, 64)$, 则 $E\xi = 100, D\xi = 8$;

D. $E(4X + 1) = 4E(X) + 1$, $D(4X + 1) = 16D(X) + 1$.

10. 已知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \theta) + 1 (0 < \theta < \pi)$, 其一个对称中心为点 $(\frac{\pi}{6}, 1)$, 那么以下正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后, 关于 y 轴对称;

B. 函数 $|f(x)|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$;

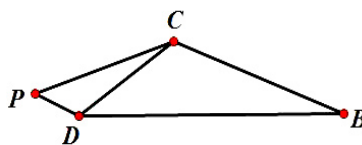
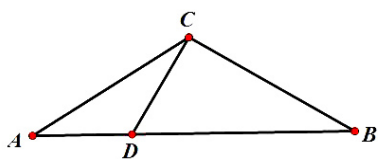
C. 不等式 $f(x) \leq 0$ 的解集是 $\left\{x \mid k\pi + \frac{\pi}{4} \leq x \leq k\pi + \frac{7\pi}{12}, k \in Z\right\}$;

D. 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{12}, 0\right]$ 时, $f(x) + \frac{36}{\pi}x \geq 0$ 恒成立.

11. 已知 x, y, z 均为正数, $a = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$, $b = \sqrt{y^2 + yz + z^2}$, $c = \sqrt{x^2 + xz + z^2}$, 则三元数组 (a, b, c) 可以是以下 ()

- A. (1, 2, 3) B. (3, 4, 9) C. (5, 6, 10) D. (7, 8, 13)

12. 已知等腰三角形 ABC , $AC = BC = 3$, $AB = 3\sqrt{3}$, D 为边 AB 上一点, 且 $AD = \sqrt{3}$, 沿 CD 把 $\triangle ADC$ 向上折起, A 到达点 P 位置, 使得二面角 $P-CD-B$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$, 在几何体 $PBCD$ 中, 若其外接球半径为 R , 其外接球表面积为 S , 那么以下正确的是 ()



- A. $CD = \sqrt{3}$ B. $PB = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ C. $R = 3$ D. $S = 39\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，其中 16 题第一空 2 分，第二空 3 分，共 20 分。

13. 在 $(x - \frac{1}{x^2})^9$ 的展开式中，常数项是第_____项。

14. 已知函数 $f(x) = \lg(ax^2 - 6x + 5)$ 的值域为 R ，那么 a 的取值范围是_____。

15. 已知椭圆 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$ 上有不同的三点 A, B, C ，那么 $\triangle ABC$ 面积最大值是_____。

16. 对 $\forall x \in (0, +\infty)$ ，都有 $f(x) = x^3 + (e-2m)x^2 + x + e^x - e(\ln x + 1) \geq 0$ 恒成立，那么 m 的取值范围是_____。

四、解答题：本题共 6 小题，第 17 题 10 分，第 18~22 题每题 12 分，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 已知数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和 $S_n = n^2 - 6n + 1$ ，

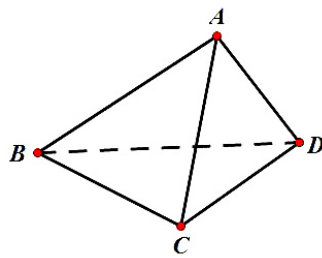
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = 2^n$ ，求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. 已知在如图所示的三棱锥 $A-BCD$ 中， $BD = 4, BA = 2\sqrt{3}, BC = 2\sqrt{2}$ ， $\angle BAD = \angle BCD = \frac{\pi}{2}$ ，面 $BAD \perp$ 面 BCD ，

(1) 求棱 AC 的长度；

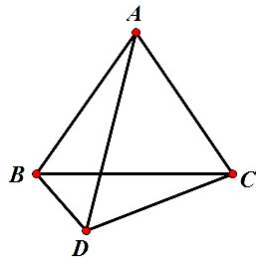
(2) 求直线 CD 与平面 ABC 所成角的正弦值。



19. 在三角形 ABC 中，若 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C$ ，

(1) 求角 A 的大小；

(2) 如图所示，若 $DB = 2$ ， $DC = 4$ ，求 DA 长度的最大值。



20. 甲、乙两人进行一次乒乓球比赛，约定先胜 4 局者获得这次比赛的胜利，比赛结束，假设在一局比赛中，甲、乙获胜的概率均为 0.5，且各局比赛结果相互独立，已知前两局比赛均为甲获胜，

(1) 求甲获得这次比赛胜利的概率；

(2) 设 ξ 表示从第 3 局开始到比赛结束所进行的局数，求 ξ 的分布列及数学期望.

21. 已知函数 $f(x) = e^x$ ， $g(x) = -x^2$.

(1) 若 $f(x) \geq ax+1$ 恒成立，求 a .

(2) 若直线 l 与函数 $f(x)$ 的图像切于 $A(x_1, y_1)$ ，与函数 $g(x)$ 的图像切于 $B(x_2, y_2)$ ，求证： $x_1 + x_2 < \frac{1}{4}$.

22. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，左、右焦点分别为 $F_1(-1, 0)$ 、 $F_2(1, 0)$ ，左、右顶点分别为 A 、 B ，

若 T 为椭圆上一点， $\angle F_1TF_2$ 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$ ，点 P 在直线 $x=4$ 上，直线 PA 与椭圆 C 的另一个交点为 M ，

直线 PB 与椭圆 C 的另一个交点为 N ，其中 M 、 N 不与左右顶点重合.

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 从点 A 向直线 MN 做垂线，垂足为 Q ，证明：存在点 D ，使得 $|DQ|$ 为定值.