

2023 年春季学期高一年级 6 月质量检测 · 数学

参考答案、提示及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	B	C	D	C	D	B
题号	9	10	11	12				
答案	ACD	BCD	AD	BC				

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 【答案】A

【解析】由 $z = (a-3) - (3a+1)i$ 为纯虚数，有 $\begin{cases} a-3=0, \\ 3a+1 \neq 0, \end{cases}$ 可得 $a=3$ ，故选 A.

2. 【答案】D

【解析】由两条相互平行的直线能确定一个平面，可知 D 选项正确，故选 D.

3. 【答案】B

【解析】由 $A = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $B = \left\{y \mid y = (x-1)^2 + \frac{1}{4}\right\} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ ，有 $A \cap B = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ ，故选 B.

4. 【答案】C

【解析】由 $|a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = 9$, $|a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = 4$ ，两式作差可得 $a \cdot b = \frac{5}{4}$ ，故选 C.

5. 【答案】D

【解析】 $a = 4 \log_2 2 = \frac{4}{3} \log_2 8 < \frac{4}{3} \log_2 9 = \frac{8}{3}$ ，由 $\frac{27}{10} - \frac{8}{3} = \frac{1}{30} > 0$ ，有 $b = \frac{27}{10} > \frac{8}{3} > a$ ，可得 $b > a$ ，又由 $c > 2^{\frac{1}{1000}} = 2^{\frac{1}{1000}}$ ，有 $c^2 - b^2 > 8 - \left(\frac{27}{10}\right)^2 = \frac{71}{100} > 0$ ，有 $c > b$ ，可得 $c > b > a$ ，故选 D.

6. 【答案】C

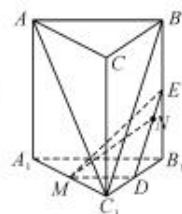
【解析】设圆台的高为 h 厘米，有 $h = \sqrt{7.5^2 - \left(\frac{18-9}{2}\right)^2} = 6$ 厘米，圆柱的体积为 $\frac{1}{3} \pi \times \left[\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \times 9 + 9^2\right] \times 6 = \frac{567\pi}{2} \approx \frac{567}{2} \times 3.14 = 890.19$ 立方厘米，需要营养土约为 $890.19 \times 20000 \times \frac{1}{1000000} = 17.80$ 立方米，故选 C.

7. 【答案】D

【解析】由 $a+2b = (a+2b)\left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{4b}{a} + \frac{a}{b} + 4 \geq 2\sqrt{\frac{4b}{a} \times \frac{a}{b}} + 4 = 8$ (当且仅当 $a=4, b=2$ 时取等号)，又由 $a^2 + 4b^2 \geq \frac{1}{2}(a+2b)^2$ (当且仅当 $a=4, b=2$ 时取等号)，有 $a^2 + 4b^2 \geq 32$ ，可得 $a^2 + 4b^2$ 的最小值为 32，故选 D.

8. 【答案】B

【解析】如图，取 B_1C_1 的中点 D , BB_1 的中点 E ，连接 MD, DE, ME ，由 $MD \parallel A_1B_1 \parallel AB$, $DE \parallel BC_1$ ，可得平面 $MDE \parallel$ 平面 ABC_1 ，故点 N 的轨迹为线段 DE ，又由 $DE = \frac{1}{2}BC_1 = 2$ ，可得 $BC_1 = 4$ ，故选 B.



二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9.【答案】ACD

【解析】小王和小张都中奖的概率为 $0.2 \times 0.4 = 0.08$,小王和小张都没有中奖的概率为 $(1-0.2) \times (1-0.4) = 0.48$,小王和小张中只有一个人中奖的概率为 $0.4 \times (1-0.2) + (1-0.4) \times 0.2 = 0.44$,小王和小张中至多有一个中奖的概率为 $1-0.08=0.92$. 故选 ACD.

10.【答案】BCD

【解析】对于 A 选项, $\vec{EF} = \frac{1}{2}\vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{AD} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$,故 A 选项错误;

对于 B 选项, $\vec{EC} = \vec{BC} - \vec{BE} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{BA} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$,故 B 选项正确;

对于 C 选项,由 $DO=2OB$,有 $\vec{FO} = \vec{DO} - \vec{DF} = \frac{2}{3}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$,故 C 选项正确;

对于 D 选项,由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$,有 $\vec{EF} \cdot \vec{EC} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \frac{1}{4}(-\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2) = \frac{1}{4} \times (-1-4+2) = -\frac{3}{4}$,故 D 选项正确. 故选 BCD.

11.【答案】AD

【解析】对于 A 选项,由 $A > B$,有 $a > b$,由正弦定理可得 $\sin A > \sin B$,故 A 选项正确;

对于 B 选项,由 $\sqrt{3} < 1.74 < 2$,可知 $\triangle ABC$ 有两解,可知 B 选项错误;

对于 C 选项,由 $\tan A = \frac{a}{b}$,得 $\sin A = \sin B \tan A$,有 $\cos A = \sin B$,可得 $A+B = \frac{\pi}{2}$ 或 $B = \frac{\pi}{2} + A$,可知 C 选项错误;

对于 D 选项,若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形或直角三角形,有 $\cos A + \cos B + \cos C > 0$;若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,不妨设 C 为钝角,有 $\cos C < 0$, $\cos A > 0$, $\cos B > 0$,有 $\cos A + \cos B + \cos C > \cos A + \cos C = \cos A - \cos(A+B) = \cos A - \cos A \cos B + \sin A \sin B > \cos A(1 - \cos B) > 0$,可知 D 选项正确. 故选 AD.

12.【答案】BC

【解析】对于 A 选项,由正三棱锥的对称性可知 $PQ \perp$ 平面 ABC ,如图,连接 OA ,可得 $PQ \perp OA$,有 $OA = \sqrt{AP^2 - OP^2} = \sqrt{AQ^2 - OQ^2}$,有 $\sqrt{4-4OQ^2} = \sqrt{2-OQ^2}$,解得 $OQ = \frac{\sqrt{6}}{3}$,可得 $|PQ| = \sqrt{6}$,故 A 选项错误;

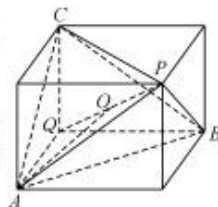
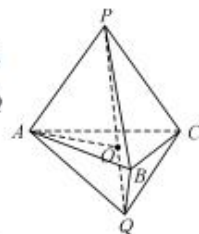
对于 B 选项,由 $AO = \sqrt{2 - (\frac{\sqrt{6}}{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,可得 $BC = \frac{3OA}{2\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{3 \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$,又由 AQ

$= BQ = CQ = \sqrt{2}$,可得 $\angle AQB = \angle BQC = \angle AQC = \frac{\pi}{2}$,易知 AQ, BQ, CQ 两两垂直,

故 B 选项正确;

对于 C 选项,由 AQ, BQ, CQ 两两垂直, $AB = BC = AC = AP = BP = CP = 2$,把正三棱锥 $P-ABC$ 和正三棱锥 $Q-ABC$ 拼成的几何体放入如图所示正方体中,可知 AP 与 CQ 的夹角为 45° ,故 C 选项正确;

对于 D 选项,由 C 选项可知,点 P, A, B, C, Q 可以同时在以 PQ 为直径的球上,故 D 选项错误. 故选 BC.



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13.【答案】如 $\pm(1-i)$, $\pm(2-2i)$, $\pm(3-3i)$ 等,写对一个即可.

14.【答案】3

【解析】由题意可知扇形的圆心角为 120° , 有 $\frac{2\pi r}{l} = \frac{2\pi}{3}$, 可得 $\frac{l}{r} = 3$.

15.【答案】 $\frac{3}{7}$

【解析】记“抽得的第一张卡片上的数字大于第二张卡片上的数字”为事件 A, 事件 A 包括以下 21 种情况: $(7,1), (7,2), (7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (4,1), (4,2), (4,3), (3,1), (3,2), (2,1)$, 而有放回地连续抽取 2 张卡片共有 $7 \times 7 = 49$ (种) 不同情况, 则 $P(A) = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}$.

16.【答案】 $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$

【解析】记 BC 的中点为 D, 由 $AG=BC$, 可得 $AD = \frac{3}{2}a$. 又由 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, 有 $|\vec{AD}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AC}|^2)$, 有 $\frac{9a^2}{4} = \frac{1}{4}(b^2 + 2bccos A + c^2)$, 有 $9a^2 = b^2 + (b^2 + c^2 - a^2) + c^2$, 有 $5a^2 = b^2 + c^2$. 又由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 有 $\begin{cases} b^2 + c^2 > a^2, \\ a^2 + c^2 > b^2, \\ a^2 + b^2 > c^2, \end{cases}$ 有 $\begin{cases} a^2 + c^2 > 5a^2 - c^2, \\ a^2 + (5a^2 - c^2) > c^2, \end{cases}$ 可得 $\sqrt{2} < \frac{c}{a} < \sqrt{3}$. 又由 $cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + c^2 - (5a^2 - c^2)}{2ac} = \frac{2c^2 - 4a^2}{2ac} = \frac{c}{a} - \frac{2a}{c}$. 令 $\frac{c}{a} = t (\sqrt{2} < t < \sqrt{3})$, 由函数 $f(t) = t - \frac{2}{t} (\sqrt{2} < t < \sqrt{3})$ 单调递增, 可得 $0 = \sqrt{2} - \sqrt{2} < f(t) < \sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 可得 $0 < cos B < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.【答案】(1) $x=2, y=-3$

【解析】(1) 由 $\vec{OC} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 有 $(8, -5) = x(1, 2) + y(-2, 3)$, 2 分
有 $\begin{cases} x - 2y = 8, \\ 2x + 3y = -5, \end{cases}$ 3 分
解得 $\begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \end{cases}$

故 $x=2, y=-3$, 5 分

(2) 由 $\vec{AB} = (-3, 1)$, 6 分

$m\vec{OA} + \vec{OC} = m(1, 2) + (8, -5) = (m+8, 2m-5)$, 8 分

又由 $\vec{AB} \parallel (m\vec{OA} + \vec{OC})$, 有 $(m+8) \times 1 - (-3) \times (2m-5) = 0$, 解得 $m=1$,

故 $m=1$ 10 分

18.【答案】(1) $m = -\frac{3}{2}$ (2) $\omega = 3$

【解析】(1) $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) - m$, 2 分

当 $\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) = 1$ 时, $f(x)_{\max} = 1 - m$, 3 分

当 $\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) = -1$ 时, $f(x)_{\min} = -1 - m$, 4 分

有 $1 - m = 5(-1 - m)$, 解得 $m = -\frac{3}{2}$.

故 $m = -\frac{3}{2}$; 5 分

(2) 当 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6 分

令 $f(x) = 0$, 有 $\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 有 $\omega x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 或 $\omega x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$; 8 分

可得 $x = \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{12}}{\omega}$ 或 $x = \frac{2k\pi + \frac{11\pi}{12}}{\omega} (k \in \mathbb{Z})$; 9 分

取 $k = 0$, 可得 $x_1 = \frac{5\pi}{12\omega}$, $x_2 = \frac{11\pi}{12\omega}$; 11 分

又由 $x_2 - 2x_1 = \frac{\pi}{36}$, 有 $\frac{11\pi}{12\omega} - \frac{10\pi}{12\omega} = \frac{\pi}{36}$, 解得 $\omega = 3$.

故 $\omega = 3$ 12 分

19. 【答案】(1) 24 人 (2) 众数: 75 分, 90% 分位数: 84 分 (3) 物业公司需要对物业服务人员进行再培训

【解析】(1) 评分在区间 $[70, 80)$ 的人数为 $100 \times 0.04 \times 10 = 40$ (人); 1 分

评分在区间 $[50, 60)$ 的人数为 $100 \times 0.016 \times 10 = 16$ (人); 2 分

故评分在区间 $[70, 80)$ 的人数与评分在区间 $[50, 60)$ 的人数之差为 $40 - 16 = 24$ (人); 3 分

(2) 业主对物业服务的满意程度给出评分的众数为 75 分; 4 分

由 $10 \times (0.016 + 0.03 + 0.04) = 0.86 < 0.9$,

$10 \times (0.016 + 0.03 + 0.04 + 0.01) = 0.96 > 0.9$; 5 分

设业主对物业服务的满意程度给出评分的 90% 分位数为 x ,

有 $(x - 80) \times 0.01 = 0.9 - 0.86$, 解得 $x = 84$;

故业主对物业服务的满意程度给出评分的众数和 90% 分位数分别为 75 分和 84 分; 8 分

(3) 业主对物业服务的满意程度给出评分的平均分为 $55 \times 0.016 \times 10 + 65 \times 0.03 \times 10 + 75 \times 0.04 \times 10 + 85 \times 0.01 \times 10 + 95 \times 0.004 \times 10 = 70.6$; 11 分

由 $\frac{70.6}{100} = 0.706 < 0.8$,

故物业公司需要对物业服务人员进行再培训. 12 分

20. 【答案】(1) $C = \frac{\pi}{3}$ (2) $OC = \frac{15\sqrt{3}}{7}$

【解析】(1) 由 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C$ 及 $\frac{a \cos B + b \cos A}{c} = \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab \sin C}$,

有 $\frac{a \cos B + b \cos A}{c} = \frac{\sqrt{3} \cos C}{\sin C}$; 2 分

又由正弦定理, 有 $\frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\sin C} = \frac{\sqrt{3} \cos C}{\sin C}$,

有 $\frac{\sin(A+B)}{\sin C} = \frac{\sqrt{3} \cos C}{\sin C}$; 4 分

有 $\frac{\sin C}{\sin C} = \frac{\sqrt{3} \cos C}{\sin C}$, 有 $\tan C = \sqrt{3}$,

又由 $C \in (0, \pi)$, 可得 $C = \frac{\pi}{3}$; 6 分

(2) 由 $C = \frac{\pi}{3}$, 有 $\angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}(\pi - C) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$,

可得 $\angle AOB = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; 7 分

在 $\triangle OAB$ 中,由 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$,有 $\frac{1}{2}AO \times OB \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$,可得 $AO \times OB = 15$,

又由余弦定理及 $AB=7$,有 $AO^2 + AO \times BO + BO^2 = 49$,有 $(AO+BO)^2 - AO \times BO = 49$,

代入 $AO \times OB = 15$,有 $AO+BO=8$,

联立 $\begin{cases} AO+OB=8, \\ AO \times OB=15, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} AO=3, \\ BO=5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} AO=5, \\ BO=3, \end{cases}$ 9分

由对称性不妨设 $\begin{cases} AO=3, \\ BO=5, \end{cases}$

在 $\triangle OAB$ 中,有 $\cos \angle OAB = \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \times 3 \times 7} = \frac{11}{14}$,可得 $\sin \angle OAB = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 10分

又由 OA 为角 A 的角平分线,有 $\sin \angle OAC = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 11分

在 $\triangle OAC$ 中,由正弦定理有 $\frac{OA}{\sin \angle ACO} = \frac{OC}{\sin \angle CAO}$,有 $\frac{3}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{OC}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}$,可得 $OC = \frac{15\sqrt{3}}{7}$ 12分

21.【答案】(1)点 N 为 CG 的中点 (2) $AE=2$ 或 $2\sqrt{2}$

【解析】(1)如图,连接 EG 与 HF 相交于点 O ,

$\because$ 平面 $CEG \cap$ 平面 $FHN = ON$,

$ON \subset$ 平面 FHN , $EC \not\subset$ 平面 FHN , $EC \parallel$ 平面 FHN ,

$\therefore EC \parallel ON$, 2分

$\because O$ 为正方形 $EFGH$ 的对角线的交点, $\therefore OF = OH$, $OE = OG$,

$\because OE = OG$, $EC \parallel ON$, $\therefore GN = NC$,

$\therefore$ 点 N 为 CG 的中点; 4分

(2)设 $AE = 2x (x > 0)$,如图,连接 ON ,记 FN 和 BG 的交点为 T ,过点 G 作 ON 的垂线,垂足为 P ,连接 PT ,

$\because$ 四边形 $EFGH$ 为正方形, O 为对角线的交点, $\therefore FH \perp OG$,

$\because FN = \sqrt{FG^2 + GN^2}$, $HN = \sqrt{HG^2 + GN^2}$, $FG = HG$, $\therefore FN = HN$,

$\because FN = HN$, $OH = OF$, $\therefore ON \perp FH$, 6分

$\because FH \perp OG$, $ON \perp FH$, $OG, ON \subset$ 平面 OGN , $OG \cap ON = O$, $\therefore FH \perp$ 平面 OGN ,

$\because FH \perp$ 平面 OGN , $GP \subset$ 平面 OGN , $\therefore FH \perp GP$,

$\because GP \perp ON$, $GP \perp FH$, $FH, ON \subset$ 平面 FHN , $FH \cap ON = O$, $\therefore GP \perp$ 平面 FHN ,

$\because GP \perp$ 平面 FHN , $\therefore$ 直线 BG 与平面 FHN 所成的角的平面角为 $\angle GTP$,

$\therefore \angle GTP = \frac{\pi}{3}$, 8分

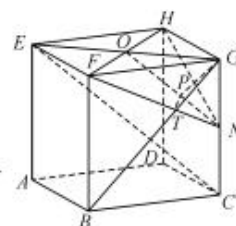
在正方形 $EFGH$ 中,由 $EG = 2\sqrt{2}$,可得 $OG = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

在 $Rt\triangle OGN$ 中, $ON = \sqrt{OG^2 + GN^2} = \sqrt{2 + x^2}$,有 $PG = \frac{OG \times GN}{ON} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 + 2}}$,

在长方形 $BCGF$ 中,由 $BF = 2GN$, $BF \parallel GN$,有 $BT = 2GT$,

可得 $TG = \frac{1}{3}BG = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 4x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{1 + x^2}$, 10分

在 $Rt\triangle PGT$ 中, $\sin \angle GTP = \frac{PG}{GT} = \frac{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 + 2}}}{\frac{2}{3}\sqrt{1 + x^2}} = \frac{3\sqrt{2}x}{2\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}}$.



又由 $\angle GTP = \frac{\pi}{3}$, 有 $\frac{3\sqrt{2}x}{2\sqrt{(x^2+1)(x^2+2)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $x=1$ 或 $x=\sqrt{2}$,

故 $AE=2$ 或 $2\sqrt{2}$ 12 分

22. 【答案】(1) $a=0$ (2) 略 (3) $(-\infty, 2]$

【解析】(1) 由函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 有 $f(0) = \log_2(a+1) = 0$, 可得 $a=0$, 1 分

当 $a=0$ 时, 由 $f(x) = \log_2(\sqrt{x^2+1}+x)$, $f(-x) = \log_2(\sqrt{x^2+1}-x) = \log_2 \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$= \log_2 \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \log_2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\log_2(\sqrt{x^2+1}+x) = -f(x)$, 此时 $f(x)$ 为奇函数,

又由 $\sqrt{x^2+1}+x > \sqrt{x^2}+x = |x|+x \geq 0$, 可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 故 $a=0$ 满足题意,

故实数 a 的值为 0; 2 分

(2) 证明: 由 (1) 有 $f(x) = \log_2(\sqrt{x^2+1}+x)$,

不妨设 $x_2 > x_1 \geq 0$, 有 $\sqrt{x_2^2+1} > \sqrt{x_1^2+1}$,

由不等式的性质有 $\sqrt{x_2^2+1}+x_2 > \sqrt{x_1^2+1}+x_1 > 0$, 4 分

利用对数函数的单调性, 有 $\log_2(\sqrt{x_2^2+1}+x_2) > \log_2(\sqrt{x_1^2+1}+x_1)$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$,

由上知函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

又由函数 $f(x)$ 为奇函数, 可知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

又由 $f(0)=0$, 可知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; 6 分

(3) 由 $g(-x) = f(-x) + 2^{-x} - 2^x = -f(x) - (2^x - 2^{-x}) = -[f(x) + 2^x - 2^{-x}] = -g(x)$,

可得函数 $g(x)$ 为奇函数.

又由函数 $f(x)$ 和 $y=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 可得函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 7 分

不等式 $g(x^2+3) + g(-m|x+1|) \geq 0$ 可化为不等式 $g(x^2+3) \geq -g(-m|x+1|)$,

可化为 $g(x^2+3) \geq g(m|x+1|)$, 有 $x^2+3 \geq m|x+1|$,

可知对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 不等式 $g(x^2+3) + g(-m|x+1|) \geq 0$ 恒成立, 等价于对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2+3 \geq m|x+1|$ 恒成立, 8 分

① 当 $m \leq 0$ 时, $m|x+1| \leq 0$, $x^2+3 \geq 0$, 不等式 $x^2+3 \geq m|x+1|$ 显然成立;

② 当 $m > 0$ 时,

I. 若 $x = -1$, $m|x+1| = 0$, $x^2+3 = 4 > 0$, 不等式 $x^2+3 \geq m|x+1|$ 显然成立, 9 分

II. 若 $x > -1$, 不等式 $x^2+3 \geq m|x+1|$ 可化为 $m \leq \frac{x^2+3}{x+1}$, 又由 $\frac{x^2+3}{x+1} = \frac{(x+1)^2-2(x+1)+4}{x+1} = (x+1) + \frac{4}{x+1} - 2 \geq 2\sqrt{(x+1) \times \frac{4}{x+1}} - 2$ (当且仅当 $x=1$ 时取等号),

故有 $0 < m \leq 2$; 11 分

III. 若 $x < -1$, 不等式 $x^2+3 \geq m|x+1|$ 可化为 $m \leq -\frac{x^2+3}{x+1}$,

又由 $-\frac{x^2+3}{x+1} = -\frac{(x+1)^2-2(x+1)+4}{x+1} = 2 - (x+1) - \frac{4}{x+1} = 2 + \left[-(x+1) + \left(-\frac{4}{x+1}\right)\right] \geq 2 +$

$2\sqrt{-(x+1) \times \left(-\frac{4}{x+1}\right)} = 6$ (当且仅当 $x=-3$ 时取等号),

故有 $0 < m \leq 6$,

由 I、II、III 可得 $0 < m \leq 2$,

由 ①② 可知, 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 2]$ 12 分