秘密★启用前

2020~2021 学年度第二学期期末考试

高二数学试题

2021．7

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．下列求导正确的是

A．$(\frac{1}{x})'=\frac{1}{x^2}$　　B．$(\cos x)'=\sin x$

C．$(e^{-x})'=e^{-x}$　　D．$(\log_2 x)'=\frac{1}{x\ln 2}$

2．一名同学有 2 本不同的数学书，3 本不同的物理书，现要将这些书放在一个单层的书架上．如果要将全部的书放在书架上，且不使同类的书分开，则不同放法的种数为

A．24　　B．12　　C．120　　D．60

3．等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 与公比 q 变化时，$a_2a_5a_{11}$ 是一个定值，则一定为定值的项是

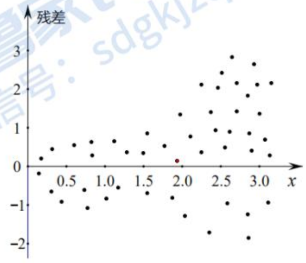
A．a_5　　B．a_6　　C．a_7　　D．a_8

4．当 $P(B)>0$ 时，若 $P(\overline{A})=1-P(A|B)$，则

A．$A\subseteq B$　　B．$A\cap B=\varnothing$

C．A 与 B 相互独立　　D．A 与 B 互为对立

5. 根据变量 Y 和 x 的成对样本数据，由一元线性回归模型 $\begin{cases} Y = bx + a + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2 \end{cases}$ 得到线性回归模型 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$，对应的残差如图所示，模型误差



A．满足一元线性回归模型的所有假设

B．满足回归模型 $E(e)=0$ 的假设

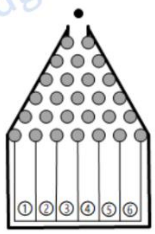
C．满足回归模型 $D(e)=\sigma^2$ 的假设

D．不满足回归模型 $E(e)=0$ 和 $D(e)=\sigma^2$ 的假设

6. 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列，$A_n = a_n + a_{n+1}$ $(n=1，2，\cdots)$，给出命题：①若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{A_n\}$ 是等差数列；②若 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $\{A_n\}$ 是等比数列；③若 $\{A_n\}$ 是等差数列，则 $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列．其中正确命题的个数为

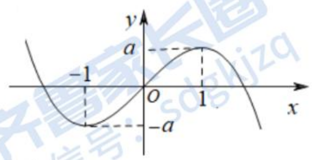
A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

7. 右图是一块高尔顿板示意图：在一块木板上钉着若干排互相平行但相互错开的圆柱形小木块，小木块之间留有适当的空隙作为通道，小球从上方的通道口落下后，将与层层小木块碰撞，最后掉入下方的某一个球槽内.若小球下落过程中向左、向右落下的机会均等，则小球最终落入②号球槽的概率为



A．$\dfrac{3}{32}$　　　　B．$\dfrac{5}{32}$　　　　C．$\dfrac{15}{64}$　　　　D．$\dfrac{5}{16}$

8. 已知三次函数 $f(x)$ 的图象如图，则不正确的是



A．$f'(2) > f'(3)$

B．$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'(-1)$

C．若 $f(x) = 2xf'(0) - \dfrac{1}{3}x^3 - x$，则 $a = \dfrac{3}{4}$

D．$x \cdot f'(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (0,1)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．对变量 y 和 x 的一组样本数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n) 进行回归分析，建立回归模型，则

A．残差平方和越大，模型的拟合效果越好

B．若由样本数据得到经验回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则其必过点 $(\bar{x},\bar{y})$

C．用决定系数 R^2 来刻画回归效果，R^2 越小，说明模型的拟合效果越好

D．若 y 和 x 的样本相关系数 $r=-0.95$，则 y 和 x 之间具有很强的负线性相关关系

10．已知 n，$m\in\mathbf{N}^*$，且 $n>m$，则

A．$C_n^m=C_n^{n-m}$　　B．$A_n^{m+1}>A_n^m$　　C. $A_n^m>C_n^m$　　D．$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$

11．杨明上学有时坐公交车，有时骑自行车．他各记录了 50 次坐公交车和骑自行车所花的时间，经数据分析得到：坐公交车平均用时 30 min，样本方差为 36；骑自行车平均用时 35 min，样本方差为 4．假设坐公交车用时 X（单位：min）和骑自行车用时 Y（单位：min）都服从正态分布．正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 中的参数 μ 用样本均值估计，参数 σ 用样本标准差估计，则

A．$P(X\leqslant 25)<P(X\geqslant 30)$　　B．$P(Y\leqslant 30)<P(Y\geqslant 45)$

C．$P(X<24)>P(Y>39)$　　D．若某天只有 35 min 可用，杨明应选择坐公交车

12．已知 $a,b\in\mathbf{R}$，$b\neq 0$，$a\neq b$，$f(x)=b(x-a)^2(x-b)$，则

A．若 a 是极大值点，则 $ab<b^2$　　B．若 a 是极小值点，则 $ab>b^2$

C．关于 x 的方程 $f(x)=f(\frac{a+2b}{3})$ 有三个实根

D．关于 x 的方程 $f(x)=f(\frac{2a+b}{3})$ 有三个实根

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$(1+x)^4+(1+x)^5+(1+x)^6$ 的展开式中 x^4 的系数是_________（用数字作答）．

14．a 是 2 与 8 的等比中项，$a+1$ 是 -1 与 $1-2\sqrt{b}$ 的等差中项，则 $a+b$ 的值为______．

15．已知随机变量 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	a	$\frac{1}{3}$	b

若 $E(X)=\frac{5}{3}$，则 $D(3X+1)=$__________.

16．当 $x\in[1,+\infty)$ 时，$\frac{ae^{x}}{x}+\ln x\geqslant x-1$ 恒成立，则实数 a 的取值区间为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

在 $(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^{n}$ 的展开式中，只有第 4 项的二项式系数最大．

（1）写出正整数 n 的值（不需要具体过程）；

（2）求展开式中的常数项；

（3）展开式中各项二项式系数之和记为 A，各项系数之和记为 B，求 $A+B$．

18．（本题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, & n\text{ 为奇数},\\ a_n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

（1）求 a_2，a_3，a_4，并求 a_n；

（2）求 $\{a_n\}$ 的前100项和 S_{100}．

19．（本题满分 12 分）

有3台机床加工同一型号的零件，第1台加工零件的次品率为4%，第2，3台加工零件的次品率均为6%，加工出来的零件混放在一起．已知第1，2，3台机床加工的零件数分别占总数的25%，35%，40%．记 A_i 为“零件为第 i 台机床加工”（$i=1$，2，3）．

（1）任取一个零件，计算它是次品的概率；

（2）如果取到的一个零件是次品，分别计算它是第1，2台机床加工的概率．

20.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2+2k\ln x$，$k\in\mathbf{R}$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;

（2）求 $f(x)$ 在 $[1，e]$ 上的最小值.

21.（本题满分 12 分）

某高中学校为了解高二年级学生在2021年高考和中考期间居家学习的自制力，随机抽取了 100 名学生，请他们的家长（每名学生请一位家长）对学生打分，满分为 10 分．下表是家长所打分数 x 的频数统计：

分数 x	5	6	7	8	9	10
频数	5	15	20	25	20	15

（1）求家长所打分数的平均值 $\bar{x}$；

（2）在抽取的 100 位学生中，男同学共 50 人，其中打分不低于 8 分的男同学为 20 人，填写列联表．若打分不低于 8 分认为“自制力强”，打分低于 8 分认为“自制力一般”，依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，判断高二年级学生的性别与自制力的强弱是否有关联？如果结论是性别与自制力的强弱有关联，请解释它们如何相互影响.

性别 X	自制力 Y		合计
	不小于 8 分	小于 8 分	
男	20	30	50
女			50
合计			100

附： $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

α	0.01	0.005	0.001
x_α	6.635	7.879	10.828

22.（本题满分 12 分）

已知 $f(x)=e^x+a\sin x-\frac{1}{2}x^2-1\ (a\leqslant 2)$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

（2）讨论 $f(x)$ 在 $(0，\pi)$ 内极值点的个数.

2020~2021 学年度第二学期期末考试

高二数学参考答案及评分标准

2021．7

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1～4：DABC　　5～8：DCBC

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．BD　　10．AD　　11．ACD　　12．ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．21　　14．5　　15．5　　16．$[\frac{1}{e^2}，+\infty)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（1）$n=6$．……………………………………………………………… 3 分

（2）展开式的通项 $T_{k+1}=C_6^k(-\frac{1}{\sqrt{x}})^k(2x)^{6-k}=C_6^k(-1)^k\cdot 2^{6-k}x^{6-\frac{3}{2}k}$．…………… 5 分

由 $6-\frac{3}{2}k=0$，得 $k=4$．……………………………………………… 6 分

故展开式中的常数项为 $T_5=C_6^4(-1)^4\cdot 2^{6-4}=60$．………………………… 7 分

（3）由题意，$A=C_6^0+C_6^1+\cdots+C_6^6=2^6=64$．……………………………… 8 分

在 $(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 中，令 $x=1$，得 $B=1$．…………………………………… 9 分

所以 $A+B=65$．………………………………………………………… 10 分

18．解：（1）$a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2=2$，$a_4=a_3+1=3$．……………………… 3 分

当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，由题意，得 $a_{2k}=a_{2k-1}+1$，$a_{2k+1}=a_{2k}$．

于是 $a_{2k+1}=a_{2k-1}+1$，即 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=1$．…………………………… 5 分

所以，$\{a_{2k-1}\}$ 是以1为首项，1为公差的等差数列，

所以 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)\cdot 1=k$，即 n 为奇数时，$a_n=\frac{n+1}{2}$．………………… 6 分

当 n 为偶数时，$a_n = a_{n-1} + 1 = \dfrac{(n-1)+1}{2} + 1 = \dfrac{n+2}{2}$． ………………………… 7 分

所以，$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, n\text{为奇数}, \\ \dfrac{n+2}{2}, \ n\text{为偶数}. \end{cases}$ ………………………………………… 8 分

备注： $a_n = \dfrac{1}{2}n + \dfrac{1}{4}[3+(-1)^n]$，同样给分．求 a_n 没有过程的，结果正确给 2 分．

（2）**法 1：** $S_{100} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{99}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{100})$ ……………………………… 9 分

$= (1+2+3+\cdots+50) + (2+3+4+\cdots+51)$

$= \dfrac{(1+50)\times 50}{2} + \dfrac{(2+51)\times 50}{2}$ ……………………………………………… 11 分

$= 2\,600$． ……………………………………………………………………… 12 分

法 2： 由（1），当 $k \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_{2k-1} = k$，$a_{2k} = k+1$．

令 $b_k = a_{2k-1} + a_{2k}$，则 $b_k = 2k+1$． ……………………………………………… 9 分

$S_{100} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{99} + a_{100}) = b_1 + b_2 + \cdots + b_{50}$ ………… 10 分

$= \dfrac{b_1 + b_{50}}{2} \times 50 = \dfrac{3+101}{2} \times 50 = 2\,600$． …………………………………… 12 分

19.（1）解：设 B =“任取一个零件为次品”．

由题意，$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$，且 A_1，A_2，A_3 两两互斥．由全概率公式，得

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$ ………………………… 2 分

$= 0.25\times 0.04 + 0.35\times 0.06 + 0.4\times 0.06$ ……………………………………… 4 分

$= 0.055$． ……………………………………………………………………… 6 分

（2）$P(A_1|B) = \dfrac{P(A_1B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$ ………………………………………… 7 分

$= \dfrac{0.25\times 0.04}{0.055} = \dfrac{2}{11}$． ……………………………………………… 9 分

$P(A_2|B) = \dfrac{P(A_2B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}$ ………………………………………… 10 分

$= \dfrac{0.35\times 0.06}{0.055} = \dfrac{21}{55}$． ……………………………………………… 12 分

20．解：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$． ………………………………………………………… 1 分

$f'(x)=2x+\dfrac{2k}{x}=\dfrac{2(x^2+k)}{x}$． ………………………………………………………… 2 分

当 $k \geqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增． ………………………………… 3 分

当 $k<0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{-k}$．

若 $x\in(0,\sqrt{-k})$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

若 $x\in(\sqrt{-k},+\infty)$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增． ………………………………… 5 分

综上，当 $k \geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $k<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-k})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{-k},+\infty)$ 上单调递增． ………………………………………………………… 6 分

（2）由（1），当 $k \geqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $[1，e]$ 上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=1$． ……… 8 分

当 $k<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-k})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{-k},+\infty)$ 上单调递增．

① 若 $e \leqslant \sqrt{-k}$，即 $k \leqslant -e^2$，$f(x)$ 在 $[1，e]$ 上单调递减，

$f(x)_{\min}=f(e)=e^2+2k$． ………………………………………………………… 9 分

② 若 $1<\sqrt{-k}<e$，即 $-e^2<k<-1$，$f(x)$ 在 $[1,\sqrt{-k})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{-k}，e]$ 上单调递增．

$f(x)_{\min}=f(\sqrt{-k})=-k+k\ln(-k)$． ………………………………………… 10 分

③ 若 $\sqrt{-k} \leqslant 1$，即 $-1 \leqslant k<0$ 时，$f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增．

$f(x)_{\min}=f(1)$． ………………………………………………………… 11 分

综上，$k \leqslant -e^2$ 时，$f(x)_{\min}=e^2+2k$；$-e^2<k<-1$ 时，$f(x)_{\min}=-k+k\ln(-k)$；

$k \geqslant -1$ 时，$f(x)_{\min}=1$． ………………………………………………………… 12 分

21.（本题满分 12 分）

解：（1）家长所打分数的平均值为

$\bar{x}=\frac{1}{100}\times(5\times5+6\times15+7\times20+8\times25+9\times20+10\times15)=7.85$. ……………………… 3 分

注：列式 1 分，结果 2 分.

（2）列联表如下：

性别 X	自制力 Y		合计
	不小于 8 分	小于 8 分	
男	20	30	50
女	**40**	**10**	50
合计	**60**	**40**	100

……………………………………………………………………………………………… 5 分

零假设为 H_0：分类变量 X 与 Y 相互独立，即性别与自制力的强弱之间无关联.

根据列联表中的数据，得

$\chi^2=\frac{100\times(20\times10-30\times40)^2}{60\times40\times50\times50}=\frac{50}{3}>10.828=x_{0.001}$. ……………………………………… 7 分

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为性别与自制力的强弱之间有关联，该推断犯错误的概率不超过 0.001. ……………………………………… 8 分

男生中“自制力强”和“自制力一般”的频率分别为 $\frac{20}{50}=0.4$ 和 $\frac{30}{50}=0.6$；

女生中“自制力强”和“自制力一般”的频率分别为 $\frac{40}{50}=0.8$ 和 $\frac{10}{50}=0.2$.

………………………………………………………………………………………………10 分

由 $\frac{0.8}{0.4}=2$，$\frac{0.6}{0.2}=3$，可见，女生“自制力强”的频率是男生的 2 倍，男生“自制力一般”的频率是女生的 3 倍. 于是，根据频率稳定于概率的原理，可以认为女生自制力强的概率明显大于男生自制力强的概率，即女生自制力更强. ……………………………12 分

注：两组数据 $\frac{0.8}{0.4}=2$，$\frac{0.6}{0.2}=3$ 中拿一组说事，不扣分.

22．解：（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-1$，$f'(x)=e^x-x$，

所以 $f'(0)=1$，$f(0)=0$．

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-0=1\times(x-0)$，即 $y=x$．…… 2 分

（2）$f'(x)=e^x+a\cos x-x$，$f''(x)=e^x-a\sin x-1$．

① 当 $a\leqslant 0$ 时，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\sin x>0$，$-a\sin x\geqslant 0$，$e^x>1$．

因此 $f''(x)=(e^x-1)-a\sin x>0$，$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增．…………………… 3 分

（i）当 $a<-1$ 时，$f'(0)=1+a<0$，$f'(\pi)=e^{\pi}-a-\pi>e^2-\pi>4-\pi>0$．

所以存在唯一的 $x_0\in(0,\pi)$，使得 $f'(x_0)=0$．

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<f'(x_0)=0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)>f'(x_0)=0$，$f(x)$ 在 (x_0,π) 上单调递增．

所以 x_0 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内唯一的极值点．…………………………………………… 5 分

（ii）当 $-1\leqslant a\leqslant 0$ 时，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $f'(x)>f'(0)=1+a\geqslant 0$，

$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内没有极值点．………………………… 6 分

② 当 $0<a\leqslant 2$ 时，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，由 $e^x-x>1$，$a\cos x\geqslant 0$，得 $f'(x)>0$．………………………… 7 分

当 $x\in[\frac{\pi}{2}$，$\pi)$ 时，

因为 $y=e^x-x$ 在 $[\frac{\pi}{2}$，$\pi)$ 上单调递增，所以 $e^x-x\geqslant e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}$．

又 $a\cos x\geqslant 2\cos x>-2$，

所以 $f'(x)>e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}-2>e^{\frac{3}{2}}-\frac{3.2}{2}-2=e^{\frac{3}{2}}-3.6$．……………………………… 9 分

$e^{\frac{3}{2}}-3.6>0\Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}}>3.6\Leftrightarrow e^3>3.6^2$，

因为 $e^3>2.5^3=15.625>3.6^2=12.96$，所以 $f'(x)>e^{\frac{3}{2}}-3.6>0$．…………10 分

可见，$x\in(0,\pi)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内无极值点. ……………………………………………………11 分

综上，当 $a<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内极值点的个数为 1；当 $-1\leqslant a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内极值点的个数为 0. ……………………………………………………………………12 分