

7. 若数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式分别是 $a_n = (-1)^{n+2020} \cdot m$, $b_n = 2 + \frac{(-1)^{n+2021}}{n}$, 且 $a_n < b_n$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[-1, \frac{1}{2})$ B. $[-2, \frac{1}{2})$ C. $[-2, \frac{3}{2})$ D. $[-1, \frac{3}{2})$

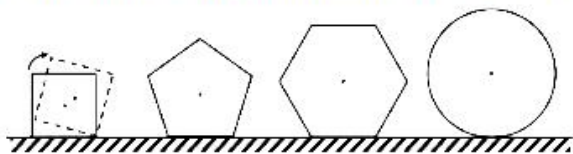
8. 若曲线 $y = \ln(x+a)$ 的一条切线为 $y = ex + b$, 其中 a, b 为正实数, 则 $a + \frac{e}{b+2}$ 的取值范围是 ()

- A. $[2, +\infty)$ B. $[e, +\infty)$ C. $[2, e)$ D. $(\frac{2}{e} + \frac{e}{2}, +\infty)$

9. 设 A 为定圆 C 圆周上一点, 在圆周上等可能地任取一点与 A 连接, 则弦长超过半径 $\sqrt{2}$ 倍的概率为 ()

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

10. 现有边长均为 1 的正方形、正五边形、正六边形及半径为 1 的圆各一个, 在水平桌面上无滑动滚动一周, 它们的中心的运动轨迹长分别为 l_1, l_2, l_3, l_4 , 则 ()



- A. $l_1 < l_2 < l_3 < l_4$ B. $l_1 < l_2 < l_3 = l_4$ C. $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ D. $l_1 = l_2 = l_3 < l_4$

11. 过双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右支上的一点 P 分别向圆 $C_1: (x+5)^2 + y^2 = 4$ 和圆 $C_2: (x-5)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$

作切线, 切点分别为 M, N , 若 $|PM|^2 - |PN|^2$ 的最小值为 58, 则 $r =$ ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

12. 若存在斜率为 $3a (a > 0)$ 的直线 l 与曲线 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2ax - 2b$ 及 $g(x) = 3a^2 \cdot \ln x$ 都相切, 则实数 b 的取值范围为 ()

- A. $[-\infty, \frac{3}{4}e^{\frac{2}{3}}]$ B. $[-\infty, \frac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}]$ C. $[\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}}, +\infty)$ D. $[\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}, +\infty)$

13. 若 $(1-2x)^{2021} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2021}x^{2021} (x \in \mathbf{R})$, 则 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_{2021}}{2^{2021}}$ 的值为_____.

14. 当实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} x \geq 0, \\ 3x + y \leq 4, \\ x + 3y \geq 4 \end{cases}$ 时, 恒有 $a(x+1) \geq 2y$, 则实数 a 的取值范围是_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{4}(a^2 + c^2)$, 若 $\sin^2 B = \sqrt{2} \sin A \sin C$, 则角 B 的值为_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $[f(x)]^2 = a$ 恰有两个不同的实数根 m, n , 则 $m+n$ 的最大值是_____.

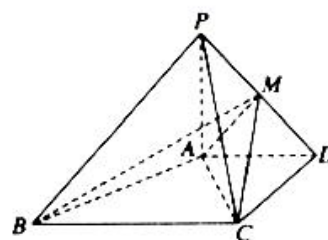
17. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{10}=23$, $a_{25}=-22$.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ 前多少项和最大?
- (2) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD \perp CD$,

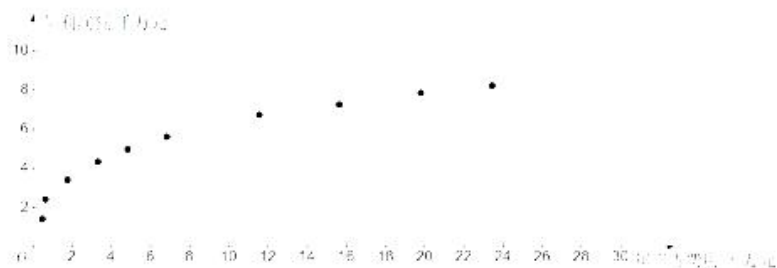
且 $AD=CD=2\sqrt{2}$, $BC=4\sqrt{2}$, $PA=4$.

- (1) 求证: $AB \perp PC$;
- (2) 在线段 PD 上, 是否存在一点 M , 使得二面角 $M-AC-D$ 的大小为 45° , 如果存在, 求 BM 与平面 MAC 所成角的正弦值; 如果不存在, 请说明理由.



19. 某电器企业统计了近10年的年利润额 Y (千万元) 与投入的年广告费用 x (十万元) 的相关数据, 散点图如图, 对数据作出如下处理: 令 $u_i = \ln x_i$, $v_i = \ln y_i$, 得到相关数据如表所示:

$\sum_{i=1}^{10} u_i v_i$	$\sum_{i=1}^{10} u_i$	$\sum_{i=1}^{10} v_i$	$\sum_{i=1}^{10} u_i^2$
30.5	15	15	46.5



- (1) 从① $y = bx + a$; ② $y = m \cdot x^k$ ($m > 0, k > 0$); ③ $y = cx^2 + dx + e$ 三个函数中选择一个作为年广告费用 x 和年利润额 Y 的回归类型, 判断哪个类型符合, 不必说明理由;
- (2) 根据 (1) 中选择的回归类型, 求出 Y 与 x 的回归方程;
- (3) 预计要使年利润额突破1亿, 下一年应至少投入多少广告费用? (结果保留到万元)

参考数据: $\frac{10}{e} \approx 3.6788$, $3.6788^3 \approx 49.787$.

参考公式: 回归方程 $y = \hat{a} + \hat{b}x$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}$.

20. 已知点 $M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 且点 M 到 C 的左、右焦点的距离之和为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 若 C 的弦 AB 的中点在线段 OM (不含端点 O, M) 上, 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x) = ax + \ln x (a \in \mathbb{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a = 1$ 时, 不等式 $xe^x + 1 > f(x) + m$ 对于任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 2$.

(1) 求曲线 C_1, C_2 的直角坐标方程;

(2) 设曲线 C_1, C_2 交于点 A, B , 曲线 C_2 与 x 轴交于点 E , 求线段 AB 的中点到点 E 的距离.

23. 已知函数 $f(x) = |x - a^2| + |x - 2a + 1|$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集;

(2) 若 $f(x) \geq 4$, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办公念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线