泸县一中2020级高三（上）第三次学月考试

文科数学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号． 回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

3． 本试卷满分150分，考试时间120分钟． 考试结束后，请将答题卡交回.

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分． 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|\ y=\log_2(x+1)\}$，$B=\{x|2^x\le 8\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|-1<x\le 3\}$　　B. $\{x|-1<x\le 2\}$

C. $\{x|-1\le x\le 3\}$　　D. $\{x|-1\le x\le 2\}$

【答案】A

【解析】

【分析】先解出集合 A、B，再求 $A\cap B$．

【详解】集合 $A=\{x|y=\log_2(x+1)\}=\{x|x>-1\}$，$B=\{x|\ x\le 3\}$，

所以 $A\cap B=\{x|-1<x\le 3\}$．

故选：A．

2. 若复数 z 在复平面内对应的点为 $(1,1)$，则其共轭复数 $\overline{z}$ 的虚部是（　　）

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. 1　　D. -1

【答案】D

【解析】

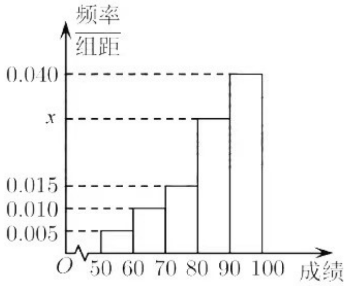
【分析】根据复数的几何意义，以及共轭复数的定义，即可求解

【详解】复数 z 在复平面内对应的点为 $(1,1)$，可得 $z=1+\mathrm{i}$，所以，共轭复数 $\overline{z}=1-\mathrm{i}$，共轭复数 $\overline{z}$ 的虚部是 -1

故选：D

3. 耀华中学全体学生参加了主题为"致敬建党百年，传承耀华力量"的知识竞赛，随机抽取了400名学生进

行成绩统计，发现抽取的学生的成绩都在 50 分至 100 分之间，进行适当分组后（每组为左闭右开的区间），画出频率分布直方图如图所示，下列说法正确的是（　　）



A. 直方图中 x 的值为 0.004

B. 在被抽取的学生中，成绩在区间 $[70,80)$ 的学生数为 30 人

C. 估计全校学生的平均成绩为 84 分

D. 估计全校学生成绩的样本数据的 80%分位数约为 93 分

【答案】C

【解析】

【分析】根据学生的成绩在 50 分至 100 分之间的频率和为 1 可求得 x 的值，就可以判断 A；计算成绩在区间 $[70,80)$ 的学生频率，然后计算在该区间的学生数，以此判断 B；

按照频率分布直方图中平均数算法计算可判断 C，按照频率分布直方图中百分位数的计算方法计算可判断 D

【详解】由直方图可得：$(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times 10=1$，解得 $x=0.03$，故 A 错误，

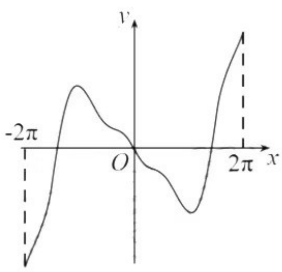
在被抽取的学生中，成绩在区间 $[70,80)$ 的学生数为 $10\times 0.015\times 400=60$ 人，故 B 错误

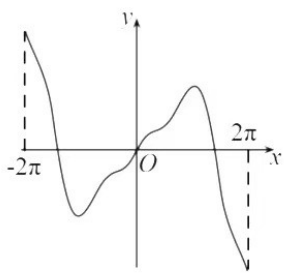
估计全校学生的平均成绩为 $55\times 0.05+65\times 0.1+75\times 0.15+85\times 0.3+95\times 0.4=84$ 分，故 C 正确

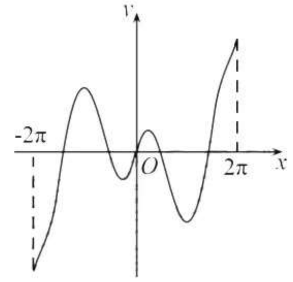
全校学生成绩的样本数据的 80% 分位数约为 $90+\dfrac{0.2}{0.4}\times 10=95$ 分，故 D 错误

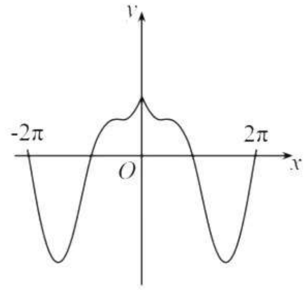
故选：C

4. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{5\sin x}{e^{|x|}}+x\cos x$ 在 $\left[-2\pi,2\pi\right]$ 上的图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数的奇偶性，结合特殊值，即可排除选项.

【详解】首先 $f(-x)=-f(x)$，所以函数是奇函数，故排除 D，$f(2\pi)=2\pi$，故排除 B，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)>0$，故排除 A，只有 C 满足条件.

故选：C

5. 已知命题 $p:\forall x\in R,\sin x<1$；命题 $q:\alpha,\beta$ 为平面，l 为直线，若 $l//\alpha,l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$. 下列为真命题的是（　　）

A. $p\wedge q$　　　　B. $p\vee(\neg q)$

C. $(\neg p)\wedge q$　　　　D. $\neg(p\vee q)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意先判断出命题 p 和命题 q 的真假，即可判断.

【详解】对命题 p，因为 $\forall x\in R,\sin x\le 1$，所以命题 p 为假命题，

对命题 q，若 $l//\alpha,l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，所以命题 q 为真命题，

所以 $p\wedge q$，$p\vee(\neg q)$，$\neg(p\vee q)$ 为假命题，$(\neg p)\wedge q$ 为真命题.

故选：C.

6. 若向量 $\vec{a}=(1,-1),\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，且 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{2}{3}\pi$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的值为（　　）

A. $-2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】依据向量数量积的定义去求$\vec{a}\cdot\vec{b}$的值

【详解】$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}, |\vec{b}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$

则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\sqrt{2}\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

故选：C

7. 已知$f(x)=\sin x+a\cos x$，实数x_0满足对于任意的$x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)\le f(x_0)$，若$\tan x_0=3$，则实数a的值为（　　）

A. -3　　B. 3

C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题得x_0是$f(x)$的一个极大值点，化简$f'(x_0)=\cos x_0-a\sin x_0=0$即得解.

【详解】解：由题意及正弦函数的图象可知，x_0是$f(x)$的一个极大值点，

由$f'(x_0)=\cos x_0-a\sin x_0=0$，得$a=\frac{1}{\tan x_0}=\frac{1}{3}$.

故选：D.

8. 过点$P(-1,0)$作圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=1$的两切线，设两切点为A、B，圆心为C，则过A、B、C的圆方程是

A. $x^2+(y-1)^2=2$　　B. $x^2+(y-1)^2=1$

C. $(x-1)^2+y^2=4$　　D. $(x-1)^2+y^2=1$

【答案】A

【解析】

【详解】试题分析：由圆$C:(x-1)^2+(y-2)^2=1$，得到圆心C（1，2），又P（-1，0）

则所求圆的圆心坐标为（0，1），

圆的半径 r=$\sqrt{2}$，

所以过A、B、C的圆方程为：$x^2+(y-1)^2=2$

考点：圆的标准方程

9. 过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 AB 两点，若以线段 AB 为直径的圆与直线 $y=3$ 相切，则 $|AB|=$（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】联立直线方程和抛物线方程，再由韦达定理即可求解.

【详解】解：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，AB 中点为 $O(x_0,y_0)$,又直线过 $F(0，1)$,

由题意可知直线斜率存在，故可设直线方程为：$y=kx+1$，

联立 $\begin{cases} y=kx+1 \\ x^2=4y \end{cases}$ 得，$x^2-4kx-4=0$，

由韦达定理得，$x_1+x_2=4k$，所以 $y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)+2=4k^2+2$，

所以 $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2k^2+1$

所以 $|AB|=y_1+y_2+p=4k^2+4$，

又以线段 AB 为直径的圆与直线 $y=3$ 相切，所以 $R=3-y_0=\dfrac{|AB|}{2}$，

即 $2-2k^2=\dfrac{4k^2+4}{2}$，解得 $k^2=0$，$|\mathrm{AB}|=4$，

故选：C.

10. 设直线 $l_1:3x-y-1=0$ 与直线 $l_2:x+2y-5=0$ 的交点为A，则A到直线 $l:x+by+2+b=0$ 的距离的最大值为（　　）

A. 4　　B. $\sqrt{10}$

C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{11}$

【答案】C

【解析】

【分析】先求出A的坐标，再求出直线 l 所过的定点 Q，则所求距离的最大值就是 AQ 的长度.

【详解】由$\begin{cases}3x-y-1=0\\x+2y-5=0\end{cases}$可以得到$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$，故$A(1,2)$，

直线l的方程可整理为：$x+2+b(y+1)=0$，故直线l过定点$Q(-2,-1)$，

因为A到直线l的距离$d\le|AQ|$，当且仅当$l\perp AQ$时等号成立，

故$d_{\max}=\sqrt{(1+2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$，

故选：C.

【点睛】一般地，若直线$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$和直线$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$相交，那么动直线

$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$（$\lambda\in R$）必过定点（该定点为$l_1,l_2$的交点）.

11. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，坐标原点为$O$，在双曲线$C$的右支上存在两点$M$，$N$，使得四边形$OMFN$是正方形，则（　　）

A. $\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{a^2}{b^2}=4$　　B. $\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=4$

C. $\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{b^2}{a^2}=4$　　D. $\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}=4$

【答案】A

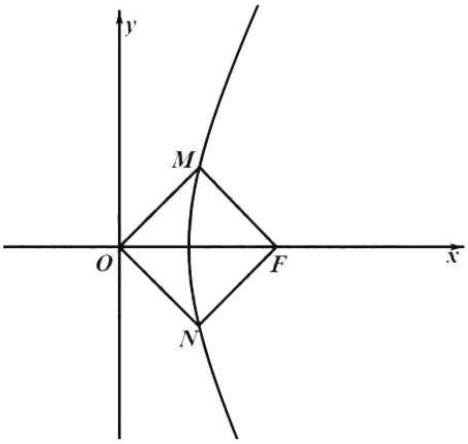
【解析】

【分析】根据正方形的性质，解得M点的坐标，代入双曲线方程，结合双曲线的定义即可求解.

【详解】解：因为四边形$OMFN$是正方形，故$OF=MN=c$，则M点的坐标为$\left(\dfrac{c}{2},\dfrac{c}{2}\right)$，

又点M在双曲线C上，则$\dfrac{\frac{c^2}{4}}{a^2}-\dfrac{\frac{c^2}{4}}{b^2}=1$，又$a^2+b^2=c^2$，整理得：$\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{a^2}{b^2}=4$.

故选：A.



12. 已知函数 $f(x)=-e^{x}+ax-e^{2}$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围为（　　）

A. $(0,e^{2})$　　B. $(0,e)$

C. $(e,+\infty)$　　D. $(e^{2},+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】求出导数，可得 $a\le 0$ 时不满足，$a>0$ 时，由导数得出单调性，得出 $a\ln a-a-e^{2}>0$，构造函数 $g(a)=a\ln a-a-e^{2},a>0$，利用导数判断单调性可求解.

【详解】$f'(x)=-e^{x}+a$，

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，此时 $f(x)$ 至多一个零点，不符合题意；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

因为 $f(x)$ 有两个零点，所以 $f(\ln a)=a\ln a-a-e^{2}>0$，

令 $g(a)=a\ln a-a-e^{2},a>0$，则 $g'(a)=\ln a$，

令 $g'(a)<0$ 解得 $0<a<1$，令 $g'(a)>0$，解得 $a>1$，

所以 $g(a)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

且当 $0<a<1$ 时，$g(a)<0$，$g(1)=-1-e^{2}<0$，$g(e^{2})=0$，

所以 $a>e^{2}$.

故选：D.

二、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.

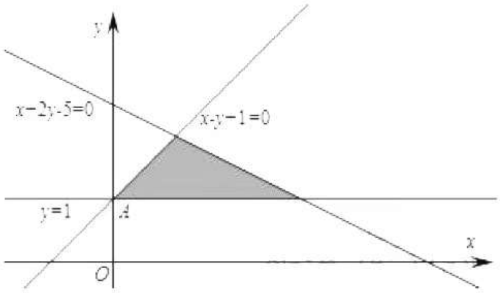
13. 在平面直角坐标系下，若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-5\le 0 \\ x-y+1\ge 0 \\ y\ge 1 \end{cases}$，则 $z=2x+y$ 的最小值为_________.

【答案】1

【解析】

【分析】由约束条件作出可行域，当直线 $z=2x+y$ 过点 $A(0,1)$ 时，相应坐标值代入 $2x+y$ 求得最小值.

【详解】由约束条件 $\begin{cases} x+2y-5\le 0 \\ x-y+1\ge 0 \\ y\ge 1 \end{cases}$ 作出可行域如图：



联立 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ y=1 \end{cases}$，解得 $A(0,1)$. 令 $z=2x+y$，

由图可知，当直线 $z=2x+y$ 过点 $A(0,1)$ 时，

z 有最小值为 1，即 $2x+y$ 的最小值为 1，

故答案为：1.

14. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+2x$ 在 $x=1$ 处切线的倾斜角为_______.

【答案】45°

【解析】

【分析】求导，求出斜率，进而可得倾斜角.

【详解】$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+2$，

则 $f'(1)=-\dfrac{1}{1}+2=1$，

即函数 $f(x)=\frac{1}{x}+2x$ 在 $x=1$ 处切线的斜率为 1，则倾斜角为 45°

故答案为：45°

15. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足：对任意的 $x\in R$，都有 $f(x+3)=-f(x)$，且当 $x\in(0,\frac{3}{2}]$ 时，$f(x)=x^2$，则 $f(\frac{5}{2})=$__.

【答案】$\frac{1}{4}$#0.25

【解析】

【分析】根据题意，结合所以 $f(\frac{5}{2})=f(-\frac{1}{2}+3)=-f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})$，即可求解.

【详解】因为函数 $f(x)$ 是奇函数，对任意的 $x\in R$，都有 $f(x+3)=-f(x)$，

且当 $x\in(0,\frac{3}{2}]$ 时，$f(x)=x^2$

所以 $f(\frac{5}{2})=f(-\frac{1}{2}+3)=-f(-\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$.

16. 已知四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 SAB 为等边三角形，$AB=3$，则当四棱锥的体积取得最大值时，其外接球的表面积为________.

【答案】21π

【解析】

【分析】根据题意可知侧面 $SAB\perp$ 底面 $ABCD$，然后结合图形由底面外接圆半径、球心到底面的距离和球的半径满足勾股定理可得.

【详解】依题意可知，当侧面 $SAB\perp$ 底面 $ABCD$ 时，四棱锥 $S-ABCD$ 的体积最大.

设球心为 O，半径为 R，正方形 $ABCD$ 和 $\triangle SAB$ 外接圆的圆心分别为 O_1，O_2，正方形 $ABCD$ 外接圆半径为 r_1，则 $OO_1\perp$ 平面 $ABCD$，$OO_2\perp$ 平面 SAB.

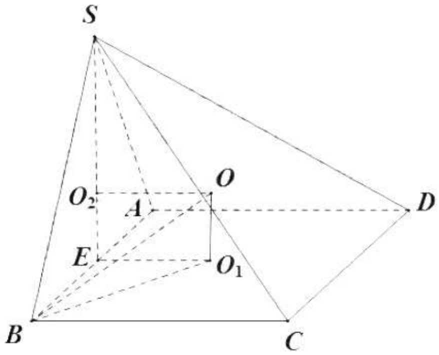
因为 $\triangle SAB$ 和正方形 $ABCD$ 的边长均为 3，设 AB 的中点为 E，

所以 $OO_1=O_2E=\frac{1}{3}SE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$O_1B=r_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

由勾股定理得 $R^2=OB^2=OO_1^2+r_1^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{21}{4}$，

所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=21\pi$.

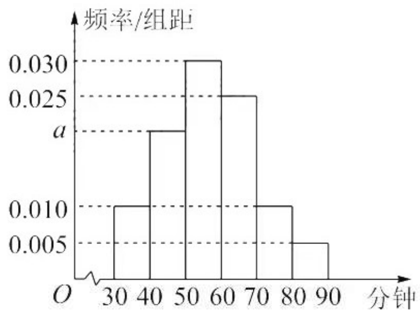
故答案为：21π



三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必做题：共 60 分．

17. 2021 年 11 月，江西省出台了新规落实"双减"政策，在加强学生作业管理方面《若干措施》提出，要控制书面作业总量，小学一、二年级不得布置家庭书面作业，小学三至六年级每天书面作业总量平均完成时间不超过 60 分钟，初中每天书面作业总量平均完成时间不超过 90 分钟．某中学为了了解七年级学生的家庭作业用时情况，从本校七年级随机抽取了一批学生进行调查，并绘制了学生家庭作业用时的频率分布直方图，如图所示．



（1）求频率分布直方图中 a 的值，并估算学生家庭作业用时的中位数（精确到 0.1）；

（2）作业用时不能完全反映学生学业负担情况，这与学生自身的学习习惯有很大关系．如果作业用时 50 分钟之内评价等级为优异，70 分钟以上评价等级为一般，其它评价等级为良好．现从等级优异和等级一般的学生里面用分层抽样的方法抽取 6 人，再从这 6 人中随机抽取 2 人，求至少有 1 人被评价为等级一般学生的概率．

【答案】（1）0.020，56.7

（2）$\dfrac{3}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据频率分布直方图的频率之和为1，即可求出a的值，根据频率分布直方图中位数的求法，即可求出结果；

(2) 根据分层抽样可知等级优异学生被抽取的人数为4人，等级一般学生被抽取的人数为2人，然后根据题意列出满足题意的所有可能，根据古典概型即可求出结果.

【小问1详解】

解：由题意可知，$(0.01+a+0.03+0.025+001+0.005)\times 10=1$，所以$a=0.020$，

由左至右各个分区间的概率分别为$0.1,0.2,0.3,0.25,0.1,0.05$，

中位数为$50+\dfrac{0.5-(0.1+0.2)}{0.3}\times 10\approx 56.7$分钟

【小问2详解】

解：由题意知按等级分层抽取6名，则等级优异学生被抽取的人数为4人，等级一般学生被抽取的人数为2人，

记4名等级优异学生分别为a,b,c,d，等级一般学生为A,B，

则从这6名学生中抽取2人的情况有

$(a,b),(a,c)(a,d),(a,A),(a,B),(b,c),(b,d),(b,A),(b,B),(c,d),(c,A)$，

$(c,B),(d,A),(d,B),(A,B)$，一共15种情况，

2人中至少有1名等级一般学生共有9种情况，故所求概率为$\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$.

18. 在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\dfrac{2b-c}{a}=\dfrac{\cos C}{\cos A}$，$a=4$.

(1) 求角A；

(2) 若点D在边AC上，且$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$，求△$BCD$面积的最大值.

【答案】(1) $\dfrac{\pi}{3}$

(2) $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 由正弦定理化边为角，然后由两角和的正弦公式，诱导公式变形可求得A；

(2) 由平面向量的线性运算求得$DC=\dfrac{1}{4}AC$，$S_{\triangle BDC}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，用余弦定理及基本不等式求得$bc$的最

大值，可得$\triangle ABC$面积的最大值，从而得结论.

【小问1详解】

因为$\dfrac{2b-c}{a}=\dfrac{\cos C}{\cos A}$，由正弦定理得$\dfrac{2\sin B-\sin C}{\sin A}=\dfrac{\cos C}{\cos A}$，

所以$\sin A\cos C=2\sin B\cos A-\sin C\cos A$，即

$2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin(A+C)=\sin B$，

三角形中$\sin B\neq 0$，所以$\cos A=\dfrac{1}{2}$，而$A\in(0,\pi)$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$；

【小问2详解】

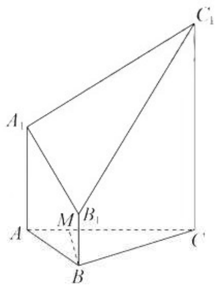
由$\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$得$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=3\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DC}$，所以$DC=\dfrac{1}{4}AC$，$S_{\triangle BDC}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，

在$\triangle ABC$中由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即$16=b^2+c^2-bc\geq 2bc-bc=bc$，当且仅当$b=c$时等号成立，

所以$(bc)_{\max}=16$，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\dfrac{1}{2}\times 16\times\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，

所以$\triangle BCD$面积的最大值为$\dfrac{1}{4}\times 4\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

19. 一个直三棱柱被平面所截得到如图所示的几何体$ABC-A_1B_1C_1$，其中A_1A、B_1B、C_1C与平面ABC垂直. $C_1C=2A_1A=4B_1B=4$，若$AC=2AB=4$，$\angle BAC=60^\circ$，M是线段AC上靠近点A的四等分点.



（1）求证：$A_1C_1\perp BM$；

（2）求此多面体的体积.

【答案】（1）证明见解析；

（2）$\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

【分析】(1)证明$BM\perp$平面ACC_1A_1即可；

(2)取AA_1中点为E，CC_1靠近C的四等分点为D，连接B_1E、B_1D、DE，则该几何体由直棱柱$ABC-EB_1D$和四棱锥$B_1-A_1EDC_1$构成，据此即可求其体积.

【小问1详解】

由题可知$AA_1\perp$平面ABC，$\therefore AA_1\perp BM$，

$\because \angle BAC=60°$，$AM=1$，$AB=2$，

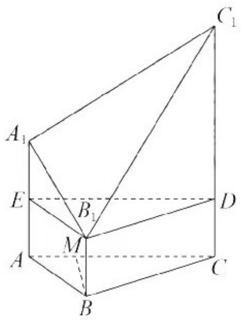
$\therefore BM^2=AM^2+AB^2-2AM\cdot AB\cdot\cos\angle BAC=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，

$\therefore AB^2=BM^2+AM^2$，$\therefore BM\perp AM$，

$\because AM\cap AA_1=A$，$BM\perp$平面ACC_1A_1，

$\because A_1C_1\subset$平面ACC_1A_1，$\therefore A_1C_1\perp BM$；

【小问2详解】



如图，取AA_1中点为E，CC_1靠近C的四等分点为D，连接B_1E、B_1D、DE，

易知平面B_1DE // 平面ABC，该几何体由直棱柱$ABC-EB_1D$和四棱锥$B_1-A_1EDC_1$构成，

其中四棱锥$B_1-A_1EDC_1$的底面是直角梯形A_1EDC_1，

由(1)知$BM\perp$平面ACC_1A_1，$\therefore$点B_1到平面A_1EDC_1的距离为BM，

$\therefore$几何体体积为

$S_{\triangle ABC}\cdot BB_1+\frac{1}{3}\cdot S_{A_1EDC_1}\cdot BM=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+3)\times 4\times\sqrt{3}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$.

20. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆过点$A(-2,-1)$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）过点$B(-4,0)$的直线l交椭圆于M、N两点，已知直线MA，NA分别交直线$x=-4$于点P，Q，求$\frac{|PB|}{|BQ|}$的值.

【答案】（1）$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

（2）1

【解析】

【分析】（1）由题意得到关于a，b的方程组，求解方程组即可确定椭圆方程；

（2）首先联立直线与椭圆的方程，然后由直线MA，NA的方程确定点P，Q的纵坐标，将线段长度的比值转化为纵坐标比值的问题，进一步结合韦达定理可证得$y_P+y_Q=0$，从而可得两线段长度的比值.

【小问1详解】

由题意$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$,\ $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，点$A(-2,-1)$在椭圆上，有$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，

解得$a^2=8,b^2=2$，故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

【小问2详解】

当直线l的斜率不存在时，显然不符；

当直线l的斜率存在时，

设直线l为：$y=k(x+4)$

联立方程$\begin{cases}y=k(x+4)\\x^2+4y^2=8\end{cases}$得：$(4k^2+1)x^2+32k^2x+64k^2-8=0$

由$\Delta>0,k^2<\frac{1}{4}$，设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，有$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{32k^2}{4k^2+1}\\x_1x_2=\frac{64k^2-8}{4k^2+1}\end{cases}$

又由直线 AM：$y+1=\frac{y_1+1}{x_1+2}(x+2)$，令 $x=-4$ 得 $y_P=-2\times\frac{y_1+1}{x_1+2}-1$，

将 $y_1=k(x_1+4)$ 代入得：$y_P=\frac{-(2k+1)(x_1+4)}{x_1+2}$，同理得：$y_Q=\frac{-(2k+1)(x_2+4)}{x_2+2}$.

很明显 $y_Py_Q<0$，且 $\frac{|PB|}{|PQ|}=\left|\frac{y_P}{y_Q}\right|$，注意到，

$$y_P+y_Q=-(2k+1)\left(\frac{x_1+4}{x_1+2}+\frac{x_2+4}{x_2+2}\right)=-(2k+1)\times\frac{(x_1+4)(x_2+2)+(x_2+4)(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)},$$

而 $(x_1+4)(x_2+2)+(x_2+4)(x_1+2)=2\left[x_1x_2+3(x_1+x_2)+8\right]$

$$=2\left[\frac{64k^2-8}{4k^2+1}+3\times\left(\frac{-32k^2}{4k^2+1}\right)+8\right]$$

$$=2\times\frac{(64k^2-8)+3\times(-32k^2)+8(4k^2+1)}{4k^2+1}=0,$$

故 $y_P+y_Q=0, y_P=-y_Q$.

所以 $\therefore|PB|=|BQ|, \therefore\frac{|PB|}{|BQ|}=1$.

【点睛】本题考查求椭圆的方程，解题关键是利用离心率与椭圆上的点，找到关于 a，b，c 的等量关系求解 a 与 b．本题中直线方程代入椭圆方程整理后应用韦达定理求出 x_1+x_2，x_1x_2．表示出 y_P，y_Q，然后转化为 $|PB|,|BQ|$ 相应的比值关系．考查了学生的运算求解能力，逻辑推理能力．属于中档题.

21．已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=ax-1(a\in R)$.

（1）若方程 $f(x)-g(x)=0$ 存在两个不等的实根 x_1，x_2，求 a 的取值范围；

（2）满足（1）问的条件下，证明：$x_1\cdot x_2>1$.

【答案】（1）$0<a<1$；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）将 $\ln x=ax-1$，转化为 $a=\frac{1+\ln x}{x}(x>0)$，即函数 $T(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ 与直线 $y=a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同交点求解；另解：令 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-ax+1(x>0)$. 求导 $h'(x)=\frac{1}{x}-a$，分 $a\leq0$，$a>0$ 讨论求解；

(2)根据 x_1，x_2 是 $ln\,x-ax+1=0$ 的两个根，得到 $a=\dfrac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}$， 将证 $x_1x_2>1$，即 $ln\,x_1+ln\,x_2>0$，转化为证 $\dfrac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$，进而转化为 $ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}$.，令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，转化为证明 $ln\,t<-\dfrac{2(t-1)}{(t+1)}$.

【详解】(1) 由题意，$\ln x=ax-1$，可得 $a=\dfrac{1+\ln x}{x}(x>0)$，

转化为函数 $T(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$ 与直线 $y=a$ 在$(0,+\infty)$上有两个不同交点，

$T'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$ $(x>0)$，

故当 $x\in(0,1)$时，$T'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$T'(x)<0$，

故 $T(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以 $T(x)_{max}=T(1)=1$.

又 $T\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$，故当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$时，$T(x)<0$，当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$时，$T(x)>0$.

可得 $a\in(0,1)$.

另解：令 $h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-ax+1(x>0)$，则：$h'(x)=\dfrac{1}{x}-a$，

①当 $a\le 0$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，$\therefore h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，不满足题意；

②当 $a>0$ 时，$y=h'(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

令 $h'(x)=0$，则 $x=\dfrac{1}{a}$，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，$h'(x)>0$，$x\in\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，$h'(x)<0$.

$\therefore h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递减；

$\therefore h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{1}{a}\right)=\ln\dfrac{1}{a}>0$，$\therefore\dfrac{1}{a}>1$，即 $0<a<1$；

综上：$0<a<1$

(2)证明：$h'(x)=\dfrac{1}{x}-a$， 因为 x_1，x_2 是 $ln\,x-ax+1=0$ 的两个根，

故 $ln\,x_1-ax_1+1=0$，$ln\,x_2-ax_2+1=0\Rightarrow a=\dfrac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}$，

要证 $h'(x_1x_2)<1-a$，

只需证 $x_1x_2>1$，即证 $ln\,x_1+ln\,x_2>0$，即证$(ax_1-1)+(ax_2-1)>0$，

即只需证明 $a>\dfrac{2}{x_1+x_2}$ 成立，即证 $\dfrac{lnx_1-lnx_2}{x_1-x_2}>\dfrac{2}{x_1+x_2}$.

不妨设 $0<x_1<x_2$，故 $ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}$.(*)

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,\ 1)$，$\varphi(t)=ln\,t-\dfrac{2(t-1)}{(t+1)}$，

$\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

则 $h(t)$在$(0,\ 1)$上单调递增，则$\varphi(t)<\varphi(1)=0$，

故（*）式成立，即要证不等式得证.

【点睛】方法点睛：用导数研究函数的零点，一方面用导数判断函数的单调性，借助零点存在性定理判断；另一方面，也可将零点问题转化为函数图象的交点问题，利用数形结合来解决.

（二）选做题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题记分．

选修 4-4：坐标系与参数方程

22. 在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho-6\cos\theta=0$.

（1）求直线 l 和曲线 C 的直角坐标方程；

（2）已知点 $M(1,0)$，若直线 l 与曲线 C 交于 P，Q 两点，求 $|MP|^2+|MQ|^2$ 的值.

【答案】(1) $x-y-1=0$；$(x-3)^2+y^2=9$. (2) 18.

【解析】

【分析】(1) 由极坐标与直角坐标的互化公式，可直接得出直线 l 和曲线 C 的直角坐标方程；

(2) 先由题意得直线 l 的参数方程，代入曲线的直角坐标方程，根据参数的方法求解，即可得出结果.

【详解】(1) 因为直线 l: $\rho\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$.

即直线l的直角坐标方程为$x-y-1=0$.

因为曲线$C:\rho-6\cos\theta=0$，则曲线C的直角坐标方程为$x^2+y^2-6x=0$，即$(x-3)^2+y^2=9$.

（2）设直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）

将其代入曲线C的直角坐标系方程得$t^2-2\sqrt{2}t-5=0$.

设P,Q对应的参数分别为t_1，t_2，则$t_1t_2=-5,t_1+t_2=2\sqrt{2}$，

所以$|MP|^2+|MQ|^2=|t_1|^2+|t_2|^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=18$.

【点睛】本题主要考查极坐标与直角坐标的互化，以及参数的方法求两点间距离，熟记公式即可，属于常考题型.

选修 4-5：不等式选讲

23. 设函数$f(x)=|x-2|-|2x+1|$.

（1）求不等式$f(x)\le x$的解集；

（2）若不等式$f(x)\ge t^2-t$在$x\in[-2,-1]$时恒成立，求实数t的取值范围.

【答案】（1）$\left[\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ （2）$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\le t\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】（1）将$f(x)$写成分段函数的形式,即$f(x)=\begin{cases}x+3,x\le-\dfrac{1}{2}\\ -3x+1,-\dfrac{1}{2}<x<2\\ -x-3,x\ge2\end{cases}$,进而求解即可；

（2）不等式$f(x)\ge t^2-t$在$x\in[-2,-1]$时恒成立可转化为$f(x)_{\min}\ge t^2-t$恒成立,进而求解即可

【详解】解：（1）$f(x)=\begin{cases}x+3,x\le-\dfrac{1}{2}\\ -3x+1,-\dfrac{1}{2}<x<2\\ -x-3,x\ge2\end{cases}$,

由 $f(x) \le x$，

则 $\begin{cases} x \le -\dfrac{1}{2} \\ x+3 \le x \end{cases}$，或 $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} < x < 2 \\ -3x+1 \le x \end{cases}$，或 $\begin{cases} x \ge 2 \\ -x-3 \le x \end{cases}$，

解得 $\varnothing$ 或 $\dfrac{1}{4} \le x < 2$ 或 $x \ge 2$，

故解集为 $\left[\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$

（2）依题意得，不等式 $f(x) \ge t^2 - t$ 在 $x \in [-2,-1]$ 时恒成立，则 $f(x)_{\min} \ge t^2 - t$，

当 $x \in [-2,-1]$ 时，$f(x) = x+3$，则 $f(x)$ 在 $x \in [-2,-1]$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min} = f(-2) = -2+3 = 1$，

则 $t^2 - t \le 1$，解得 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \le t \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【点睛】本题考查解绝对值不等式，考查不等式的恒成立问题，考查运算能力与转化思想

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。