

高 2023 届高三一诊模拟考试
数学参考答案（理科）

一. 选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	B	A	A	C	D	C	A	B	D	D

二. 填空题

13、-14 14、4 15、2 16、 $[-2,16]$

三. 解答题

17. 解：(1) 因为 $\sin A = \sin 2B = 2\sin B \cos B$,

所以 $\cos B = \frac{\sin A}{2\sin B} = \frac{a}{2b} = \frac{6}{2 \times 5} = \frac{3}{5}$, 因为 $B \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin B = \frac{4}{5}$,

又 $\sin A = \sin 2B = 2\sin B \cos B = \frac{24}{25}$, 且 A 为锐角, 所以 $\cos A = \frac{7}{25}$,

所以 $\cos C = -\cos(A+B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B = \frac{3}{5}$.

因为 $\cos C = \cos B$, 所以 $C = B$. 所以 $c = b = 5$5 分

(2) 设 $AM = m$, $AN = n$, 根据题设有 $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$,

所以 $\frac{1}{2} mn \sin A = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} bc \sin A$, 可得 $mn = \frac{25}{2}$,7 分

所以 $MN^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos A \geq 2mn - \frac{14}{25} mn = 18$, 当且仅当 $m = n = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立.

所以 MN 的最小值为 $3\sqrt{2}$12 分

18. 解：(1) 由样本频率分布表可知, 样本中获一等奖的 6 人, 获二等奖的 8 人, 获三等奖的 16 人, 共 30 人, 则 70 人没有获奖,

所以从该样本中随机抽取 2 名学生的竞赛成绩, 这 2 名学生恰有一名学生获奖的概率为

$$P = \frac{C_{30}^1 C_{70}^1}{C_{100}^2} = \frac{30 \times 70}{50 \times 99} = \frac{14}{33}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 因为该校所有参赛学生的成绩 X 近似地服从正态分布 $N(64, 225)$, 所以 $\mu = 64$,

所以 $P(X > 64) = \frac{1}{2}$, 即从所有参赛学生中随机抽取 1 名学生, 该生成绩在 64 分以上的概率为 $\frac{1}{2}$, 所以随机变量

$$\xi \sim B\left(4, \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{所以 } P(\xi = k) = C_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = C_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^4 \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4),$$

$$\text{所以 } P(\xi = 0) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad P(\xi = 1) = C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4},$$

$$P(\xi = 2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}, \quad P(\xi = 3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4},$$

$$P(\xi = 4) = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

..... 10 分

所以 $E(\xi) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$12 分

19. 解：(1) 证明： $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, 点 M, N 分别是边 AB, AC 的三等分点, 且 $AM = \frac{1}{3} AB$,

$$CN = \frac{1}{3}CA,$$

所以 $AM = 2, BM = 4, AN = 4, CN = 2, \angle A = 60^\circ$,

$$\text{所以由余弦定理得 } MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos A = 4 + 16 - 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12,$$

所以 $MN^2 + AM^2 = 12 + 4 = AN^2$, 所以 $MN \perp AB$,

所以 $MN \perp MB, MN \perp A'M$, 因为 $\angle A'MB = 90^\circ$, 所以 $A'M \perp MB$,

因为 $MN \cap MB = M$, 所以 $A'M \perp$ 平面 $MBCN$;5分

(2)由(1)可知 MB, MN, MA' 两垂直, 所以以 M 为原点, MB, MN, MA' 所在的直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示,

则 $M(0,0,0), N(0,2\sqrt{3},0), B(4,0,0), A'(0,0,2), C(1,3\sqrt{3},0)$,

所以 $\overrightarrow{MN} = (0,2\sqrt{3},0), \overrightarrow{MA'} = (0,0,2), \overrightarrow{NA'} = (0,-2\sqrt{3},2), \overrightarrow{BC} = (-3,3\sqrt{3},0)$,

因为 $MN \perp MB, MN \perp A'M$, $A'M \cap MB = M$,

所以 $MN \perp$ 平面 $A'MB$, $\overrightarrow{MN} = (0,2\sqrt{3},0)$ 为平面 $A'MB$ 的一个法向量,7分

假设线段 BC 上存在点 D , 设 $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC} (\lambda > 0)$, 则 $\overrightarrow{BD} = \lambda(-3,3\sqrt{3},0) = (-3\lambda,3\sqrt{3}\lambda,0)$,

所以 $D(4-3\lambda,3\sqrt{3}\lambda,0) (0 < \lambda \leq 1)$, 所以 $\overrightarrow{AD} = (4-3\lambda,3\sqrt{3}\lambda,-2)$,

设平面 $A'ND$ 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{NA'} = -2\sqrt{3}y + 2z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AD} = (4-3\lambda)x + 3\sqrt{3}\lambda y - 2z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = \sqrt{3}, \text{ 则 } \vec{m} = \left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\lambda}{4-3\lambda}, 1, \sqrt{3} \right), \text{9分}$$

因为平面 $A'ND$ 与平面 $A'MB$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$,

$$\text{所以 } |\cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{MN} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{MN}|}{\|\vec{m}\| \|\overrightarrow{MN}\|} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{3}\lambda}{4-3\lambda}\right)^2 + 1 + 3}} = \frac{\sqrt{39}}{13},$$

化简得 $3(63\lambda^2 - 132\lambda + 76) = 13(4 - 3\lambda)^2$,10分

$$18\lambda^2 - 21\lambda + 5 = 0, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{3} \text{ 或 } \lambda = \frac{5}{6},$$

所以在线段 BC 上是存在点 D , 使平面 $A'ND$ 与平面 $A'MB$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$,

此时 $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\lambda = \frac{5}{6}$,12分

20. 解: (1) 由椭圆的对称性知, $A(2, \sqrt{3}), C(-2, \sqrt{3})$ 必在椭圆上, 则 $B(\frac{3}{2}, -\sqrt{3})$ 不在椭圆上, 有 $D(3, \frac{\sqrt{7}}{2})$ 在椭圆

$$\text{上, 因此 } \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{7}{4b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } a = 4, b = 2,$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$5分

(2) 当直线 l 的斜率不存在时, 设 $l: x = m (-4 < m < 4)$, 则点 $A(m, \frac{1}{2}\sqrt{16-m^2}), B(m, -\frac{1}{2}\sqrt{16-m^2})$,

因 $\angle AOB = 90^\circ$, 则 $|m| = \frac{1}{2}\sqrt{16-m^2}$, 解得 $|m| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

即原点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 8分

当直线 l 的斜率存在时, 设直线 $l: y = kx + t, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + t \\ x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得: } (1 + 4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 16 = 0,$$

有 $\Delta = 64k^2t^2 - 4(1+4k^2)(4t^2-16) > 0 \Leftrightarrow 16k^2+4 > t^2$, $x_1+x_2 = \frac{-8kt}{1+4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4t^2-16}{1+4k^2}$,
 因 $\angle AOB = 90^\circ$, 则 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1+t)(kx_2+t) = (1+k^2)x_1x_2 + kt(x_1+x_2) + t^2$
 $= \frac{(1+k^2)(4t^2-16)}{1+4k^2} - \frac{8k^2t^2}{1+4k^2} + t^2 = \frac{5t^2-16-16k^2}{1+4k^2} = 0$, 整理得 $t^2 = \frac{16}{5}(1+k^2)$, 满足 $\Delta > 0$,
 原点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{\frac{t^2}{1+k^2}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,
 综上得: 原点 O 到直线 l 的距离恒为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$, 即直线 l 与圆 $x^2+y^2 = \frac{16}{5}$ 相切,
 所以直线 l 与定圆 $O: x^2+y^2 = r^2 (r > 0)$ 相切, $r = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 12 分

21.解: (1) 由已知 $u'(x) = \frac{1}{x} - a$,
 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;2 分
 当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = \frac{1}{x} - a = 0$ 得 $x = \frac{1}{a}$,
 若 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增,
 若 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减;
 综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;
 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$;5 分

(2) 解: 由题意得: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + ax - (ax+1)\ln x (a \in R) (x > 0)$,
 $g(x) = f'(x) = x + a - a \ln x - \frac{ax+1}{x} = x - \frac{1}{x} - a \ln x (x > 0)$,
 $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2} (x > 0)$ 令 $h(x) = x^2 - ax + 1 (x > 0), \Delta = a^2 - 4$
 当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $h(x) \geq 0$, $g'(x) \geq 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增; 不满足 $g(x) = f'(x) = 0$ 有三个不同实根;
 当 $a < -2$ 时, $\because h(x) = x^2 - ax + 1 (x > 0)$, $\therefore h(x) > 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增; 也不满足
 $g(x) = f'(x) = 0$ 有三个不同实根;
 当 $a > 2$ 时, 由 $h(x) = 0$ 得 $x_4 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, x_5 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$,
 $\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上递增, 在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上递减, 在 $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 上递增.
 $\therefore g(x) = f'(x) = 0$ 有三个不同实根 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$,7 分
 显然 $g(1) = 0$, 且 $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 1, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 1$, $\therefore x_2 = 1, 0 < x_1 < 1, x_3 > 1$.
 由 $g(x) = x - \frac{1}{x} - a \ln x = 0$ 的结构特征得 $g(m) = -g(\frac{1}{m})$,
 $\therefore g(x_1) = -g(\frac{1}{x_1}) \therefore g(x_1) = g(\frac{1}{x_1}) = 0$, 即 $\frac{1}{x_1} = x_3$, 即 $x_1x_3 = 1$ 由 $g(x)$ 的单调性可知,
 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $g(x) > 0$, $f(x)$ 递增; 当 $x_2 < x < x_3$ 时, $g(x) > 0$, $f(x)$ 递减.
 $\therefore f(x_1) < f(x_2), f(x_3) < f(x_2)$ 8 分
 由 $g(x_3) = x_3 - \frac{1}{x_3} - a \ln x_3$ 得 $a = \frac{x_3^2 - 1}{x_3 \ln x_3}$, 又 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + a(x - x \ln x)$,

$$\therefore f(x_3) - f(x_1) = f(x_3) - f\left(\frac{1}{x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(x_3^2 - \frac{1}{x_3^2}\right) - 2\ln x_3 + a\left(x_3 - x_3 \ln x_3 - \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_3} \ln \frac{1}{x_3}\right),$$

$$\therefore a\left(x_3 - x_3 \ln x_3 - \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_3} \ln \frac{1}{x_3}\right) = \frac{(x_3^2 - 1)^2}{x_3^2 \ln x_3} - \frac{x_3^4 - 1}{x_3^2},$$

$$\therefore f(x_3) - f(x_1) = \frac{1}{2\ln x_3} \left[2\left(x_3^2 + \frac{1}{x_3^2}\right) - \left(x_3^2 - \frac{1}{x_3^2}\right) \ln x_3 - 4\ln^2 x_3 - 4 \right],$$

$$\text{令 } x_3^2 = t (t > 1), \text{ 则 } 2\left(x_3^2 + \frac{1}{x_3^2}\right) - \left(x_3^2 - \frac{1}{x_3^2}\right) \ln x_3 - 4\ln^2 x_3 - 4 = 4\left(t + \frac{1}{t} - 2\right) - \left(t - \frac{1}{t}\right) \ln t - 2\ln^2 t,$$

$$\text{令 } G(t) = 4\left(t + \frac{1}{t} - 2\right) - \left(t - \frac{1}{t}\right) \ln t - 2\ln^2 t (t > 1), \quad \therefore G'(t) = \frac{3(t^2 - 1) - (t^2 + 4t + 1)\ln t}{t^2},$$

$$\text{令 } \varphi(t) = 3(t^2 - 1) - (t^2 + 4t + 1)\ln t (t > 1),$$

$$\varphi'(t) = 6t - \frac{1}{t} - 2(t + 2)\ln t - 4, \quad \varphi''(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{4}{t} - 2\ln t + 3, \quad \varphi'''(t) = \frac{2(t-1)^2}{t^3} < 0,$$

$$\therefore \varphi''(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上递减}, \quad \therefore \varphi''(t) < \varphi''(1) = 0, \quad \therefore \varphi'(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上递减}, \quad \therefore \varphi'(t) < \varphi'(1) = 0,$$

$$\therefore \varphi'(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上递减}, \quad \therefore \varphi(t) < \varphi(1) = 0, \quad \text{则 } G'(t) < 0,$$

$$\therefore G(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上递减}, \quad \therefore G(t) < G(1) = 0,$$

$$\therefore f(x_3) < f(x_1), \quad \therefore f(x_3) < f(x_1) < f(x_2),$$

综上: $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ 的大小关系为: $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2)$12分

22. 解: (1) 曲线C的平面直角坐标系方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 4$,

故曲线C的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 3 = 0$4分

(2) 设直线l的倾斜角为 α , 则 $E(\rho_1, \alpha), F(\rho_2, \alpha)$,

$\therefore \rho^2 - 2\rho \cos \alpha - 3 = 0$, 由韦达定理可知 $\rho_1 \rho_2 = -3$.

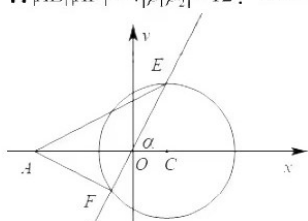
$$\text{由余弦定理可知 } |AE| = \sqrt{OA^2 + OE^2 - 2OA \cdot OE \cdot \cos \angle AOE} = \sqrt{9 + \rho_1^2 - 6 \cdot \rho_1 \cdot \cos(\pi - \alpha)}$$

$$= \sqrt{\rho_1^2 + 3(2\rho_1 \cos \alpha + 3)} = \sqrt{\rho_1^2 + 3\rho_1^2} = 2|\rho_1|,$$

$$|AF| = \sqrt{OA^2 + OF^2 - 2OA \cdot OF \cdot \cos \angle AOF} = \sqrt{9 + \rho_2^2 + 6 \cdot \rho_2 \cdot \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{\rho_2^2 + 3(2\rho_2 \cos \alpha + 3)} = \sqrt{\rho_2^2 + 3\rho_2^2} = 2|\rho_2|,$$

$$\therefore |AE||AF| = 4|\rho_1 \rho_2| = 12. \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$



23. 解: (1) 因为 $|x-1| - |x-2| \leq |x-1-x+2| = 1$, 所以 $a+b+c \geq 1$,

因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$, $c^2 + a^2 \geq 2ac$,

所以 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$,

所以 $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a+b+c)^2 \geq 1$,

故 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$5分

(2) 因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 所以 $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$,

$$\text{即 } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}, \text{ 两边开平方得 } \sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}|a+b| = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b),$$

$$\text{同理可得 } \sqrt{c^2 + b^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(c+b), \quad \sqrt{c^2 + a^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(c+a),$$

三式相加, 得 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c) \geq \sqrt{2}$10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线