炎德·英才·名校联考联合体2022年秋季高三11月联考

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	C	B	B	D	C	A	ACD	BD	CD	ACD

一、选择题(本大题共**8**小题,每小题**5**分,共**40**分.)

1.D 【解析】因为 $z=\frac{1+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(1+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{1-2+3\mathrm{i}}{1+1}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$,虚部为 $-\frac{3}{2}$.故选D.

2.A 【解析】因为 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2\notin A\}=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2>2\}=\{x\mid x>\sqrt{2}$ 或 $x<-\sqrt{2}\}$,所以 $A\cap B=\{x\mid\sqrt{2}<x\leqslant 2\}$.故选A.

3.C 【解析】因为 $a=\log_{0.5}0.4>\log_{0.5}0.5=1$,又 $b=0.4^{0.6}<0.4^{0.5}<0.6^{0.5}=c<0.6^0=1$,所以 $b<c<a$.故选C.

4.B 【解析】设球的半径为 R,则圆柱的底面半径为 R,高 $2R$.则球的体积 $V_1=\frac{4}{3}\pi R^3$,圆柱的体积 $V_2=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$,$\therefore m=V_1:V_2=\frac{4}{3}\pi R^3:2\pi R^3=2:3$.所以 $x^2=6my=4y$,则其准线方程为 $y=-1$,故选B.

5.B 【解析】依题意 $\cos(\theta+\pi)=2\sin(\theta-\pi)$,$2\sin\theta=\cos\theta$,$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$,$\frac{\sin 2\theta-2}{\cos 2\theta+1}=\frac{2\sin\theta\cos\theta-2}{2\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\tan\theta-\tan^2\theta-1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$.故选B.

6.D 【解析】因为 $C_n^3=C_n^6$,所以由组合数的性质得 $n=9$,所以 $(2x-3)^9=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_9(x-1)^9$,令 $x=2$,得 $(2\times2-3)^9=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$,即 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=1$.令 $x=1$,得 $(2\times1-3)^9=a_0=-1$,所以 $a_1+a_2+\cdots+a_9=2$,故选D.

7.C 【解析】因为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦点到渐近线的距离为1,则 $b=1$,所以双曲线方程为 $C:\frac{x^2}{a^2}-y^2=1(a>0)$,由 $\begin{cases}y=kx,\\ \frac{x^2}{a^2}-y^2=1,\end{cases}$ 可得 $\left(\frac{1}{a^2}-k^2\right)x^2-1=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=0$,即 $x_2=-x_1$,

$\therefore B(-x_1,-y_1)$,设 $P(x_0,y_0)$,

则 $\frac{x_1^2}{a^2}-y_1^2=1$,$\frac{x_0^2}{a^2}-y_0^2=1$,所以 $\frac{x_1^2-x_0^2}{a^2}=y_1^2-y_0^2$,即 $\frac{y_1^2-y_0^2}{x_1^2-x_0^2}=\frac{1}{a^2}$,

又 $k_{PA}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$,$k_{PB}=\frac{-y_1-y_0}{-x_1-x_0}$,$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{1}{16}$,所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{-y_1-y_0}{-x_1-x_0}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=\frac{1}{a^2}=\frac{1}{16}$,

$\therefore a^2=16$,即 $a=4$,故A错误;

所以双曲线 $C:\frac{x^2}{16}-y^2=1$,$b=1$,$c=\sqrt{17}$,

双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{4}x$,离心率为 $\frac{\sqrt{17}}{4}$,故B错误,D错误;

若 $PF_1\perp PF_2$,则 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=(|PF_1|-|PF_2|)^2+2|PF_1||PF_2|=(2\sqrt{17})^2$,

所以 $|PF_1||PF_2|=2$,$\triangle PF_1F_2$ 的面积为1,故C正确.故选C.

8.A 【解析】由 $a_{n+2}+5a_n=6a_{n+1}$,得 $a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$,又 $a_2-a_1=4$,

所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以4为首项,5为公比的等比数列,则 $a_{n+1}-a_n=4\cdot5^{n-1}$;①

由 $a_{n+2}+5a_n=6a_{n+1}$ 得,$a_{n+2}-5a_{n+1}=a_{n+1}-5a_n$,又 $a_2-5a_1=-4$,

所以数列 $\{a_{n+1}-5a_n\}$ 是常数列,则 $a_{n+1}-5a_n=a_2-5a_1=-4$,②

由①②联立可得 $a_{n+1}=5^n+1$.

因为 $5^n<5^n+1<5\times5^n$,所以 $\log_5 5^n<\log_5(5^n+1)<\log_5(5\times5^n)$,

即 $n<\log_5(5^n+1)<n+1$,所以 $b_n=[\log_5 a_{n+1}]=[\log_5(5^n+1)]=n$,

故 $\frac{1000}{b_nb_{n+1}}=\frac{1000}{n\cdot(n+1)}=1000\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,所以 $S_{2024}=1000\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2024}-\frac{1}{2025}\right)\right]=1000\left(1-\frac{1}{2025}\right)$,则 $[S_{2024}]=999$.故选A.

二、选择题（本大题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分.）

9. ACD 【解析】由题意，成绩在区间$[90,100)$内的学生人数为$400\times0.040\times10=160$，故 A 正确；

由$(0.005+0.010+0.015+x+0.040)\times10=1$，得$x=0.030$，故 B 错误；

设中位数为a，则$(0.005+0.010+0.015)\times10+0.030(a-80)=0.5$，得$a\approx86.7$，故 C 正确；

低于 90 分的频率为$1-0.4=0.6$，设样本数据的 80%分位数为n，

则$\frac{n-90}{100-90}=\frac{0.2}{0.4}$，解得$n=95$，故 D 正确. 故选 ACD.

10. BD 【解析】由题得，$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

令$x=\frac{5}{12}\pi$，则$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$，$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 A 错误；

当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，故 B 正确；

因为$f(x)$的周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，所以若$f(x_1)=f(x_2)=1$，则$x_1-x_2=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故 C 错误；

将$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得$g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$的图象，故 D 正确. 故选 BD.

11. CD 【解析】对于 A，当$a>1$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上为增函数，当$0<a<1$时，$f(x)$在$\mathbf{R}$上为减函数，A 错误；

对于 B，$y=f(\sin(x-1))$定义域是$\mathbf{R}$，$f(\sin(2\pi+x-1))=f(\sin(x-1))$，因此$2\pi$是函数的一个周期，B 错误；

对于 C，由$f(x)\neq0$得$x\neq0$，函数定义域是$\{x|x\neq0\}$，关于原点对称，

$\frac{f(-2x)}{2f(-x)}=\frac{a^{-2x}-a^{2x}}{2\cdot(a^{-x}-a^{x})}=\frac{a^{-x}+a^{x}}{2}$，$\frac{f(2x)}{2f(x)}=\frac{a^{2x}-a^{-2x}}{2\cdot(a^{x}-a^{-x})}=\frac{a^{x}+a^{-x}}{2}$，

$\therefore\frac{f(-2x)}{2f(-x)}=\frac{f(2x)}{2f(x)}$，所以函数为偶函数，C 正确；

对于 D，当$a>1$时，$f(|x|)=a^{|x|}-a^{-|x|}=\begin{cases}a^{-x}-a^{x},x<0,\\0,x=0,\\a^{x}-a^{-x},x>0,\end{cases}$

故$f(|x|)$在$(-\infty,0]$上为减函数，在$[0,+\infty)$上为增函数，

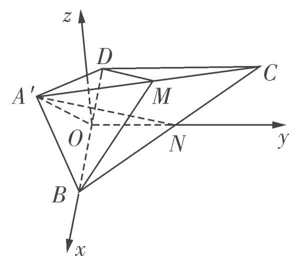
$\therefore$当$x=0$时，$f(|x|)$取得最小值 0，D 正确.

12. ACD 【解析】由题意知，$AB=AD=2$，$BD=DC=2\sqrt{2}$，$BD\perp DC$，取BD的中点O，连接$A'O$，ON，

因为$AB=AD$，O，N分别为BD，BC的中点，所以$A'O\perp BD$，$ON/\!/DC$，又$BD\perp DC$，所以$ON\perp BD$，

如图，以OB为x轴，ON为y轴，建立空间直角坐标系，则$B(\sqrt{2},0,0)$，$D(-\sqrt{2},0,0)$，$C(-\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，

$A'\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$N(0,\sqrt{2},0)$，$M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，$\overrightarrow{A'N}=\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{2},0,0)$，



所以$\overrightarrow{A'N}\cdot\overrightarrow{BD}=0\times(-2\sqrt{2})+\frac{3\sqrt{2}}{2}\times0+\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\times0=0$，

所以$A'N\perp BD$，故 A 正确；

由$\overrightarrow{A'C}=\left(-\sqrt{2},\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{2},0,0)$，

设异面直线$A'C$与BD所成的角为θ，

则$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{A'C}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}\right|=\frac{4}{\sqrt{2+\frac{25}{2}+\frac{3}{2}}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{14}}{4}$，故 B 错误；

设平面BDM的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

又$\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{BM}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{BM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-2\sqrt{2}x=0,\\-\frac{3\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}y+\frac{\sqrt{6}}{4}z=0,\end{cases}$

令$y=1$，得$x=0$，$z=-\sqrt{3}$，则$\boldsymbol{n}=(0,1,-\sqrt{3})$，

又易知平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

设二面角 $M-BD-C$ 的平面角为 α，

则 $|\cos\alpha|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-\sqrt{3}|}{1\cdot\sqrt{1+3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又易知二面角 $M-BD-C$ 为锐角，故 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，故 C 正确；

由 $|A'C|=\sqrt{2+\dfrac{25}{2}+\dfrac{3}{2}}=4$，$|BC|=4$，$|A'B|=2$，则 $\triangle A'BC$ 为等腰三角形，

所以 $S_{\triangle A'BC}=\dfrac{1}{2}\cdot|A'B|\cdot\sqrt{|BC|^2-\left(\dfrac{|A'B|}{2}\right)^2}=\sqrt{15}$，

又 $|A'D|=2$，$|DC|=2\sqrt{2}$，在 $\triangle A'DC$ 中，由余弦定理得，

$\cos\angle A'DC=\dfrac{|A'D|^2+|DC|^2-|A'C|^2}{2\cdot|A'D|\cdot|DC|}=\dfrac{4+8-16}{2\times2\times2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$\sin\angle A'DC=\sqrt{1-\cos^2\angle A'DC}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$，

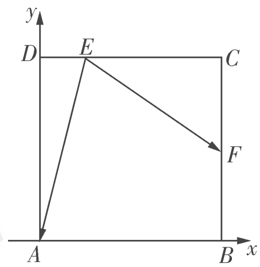
所以 $S_{\triangle A'DC}=\dfrac{1}{2}|A'D|\cdot|DC|\cdot\sin\angle A'DC=\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{14}}{4}=\sqrt{7}$，

又 $S_{\triangle A'BD}=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$，$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$，

所以三棱锥 $A'-BCD$ 的表面积为 $S=S_{\triangle A'BD}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle A'CD}=2+4+\sqrt{15}+\sqrt{7}=6+\sqrt{15}+\sqrt{7}$，故 D 正确，

故选 ACD.

三、填空题（本大题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分.）



13.20 【**解析**】以 A 为坐标原点，以 AB，AD 所在的直线分别为 x 轴，y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$E(2,8)$，$F(8,4)$.

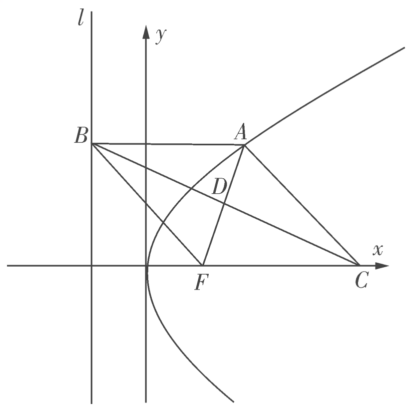
则 $\overrightarrow{EA}=(-2,-8)$，$\overrightarrow{EF}=(6,-4)$，所以 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=-2\times6+(-8)\times(-4)=20$.

14.0 【**解析**】由切点 $P(x_1,y_1)$，$y'=e^x$，则 $y=e^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-y_1=e^{x_1}(x-x_1)$，即 $y=e^{x_1}x+e^{x_1}(1-x_1)$；

由切点 $Q(x_2,y_2)$，$y'=3x^2$，则 $y=x^3$ 在点 Q 处的切线方程为 $y-y_2=3x_2^2(x-x_2)$，即 $y=3x_2^2x-2x_2^3$，由题知：两条直线是同一条直线，

则：$\begin{cases}e^{x_1}=3x_2^2,\\ e^{x_1}(1-x_1)=-2x_2^3,\end{cases}$ 化简得：$x_1-\dfrac{2}{3}x_2=1$. $\therefore\ln\left(x_1-\dfrac{2}{3}x_2\right)=0$.

15.$-\sqrt{2}$　$y^2=4x$　（任意填对一空得 3 分）



【**解析**】如图所示，$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，$C(2p,0)$.

所以 $|CF|=\dfrac{3p}{2}$.

$\because AB/\!/x$ 轴，$|CF|=|AF|$，$|AB|=|AF|$，$\therefore|CF|=|AB|$，

所以四边形 $ABFC$ 为平行四边形，

$\therefore|CF|=|AB|=\dfrac{3p}{2}$，$|CD|=|BD|$. $\therefore x_A+\dfrac{p}{2}=\dfrac{3p}{2}$，解得 $x_A=p$，

代入 $y^2=2px$ 可取 $y_A=\sqrt{2}p$，$\therefore S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3p}{2}\times\sqrt{2}p=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

解得 $p=2$. $\therefore y^2=4x$，$\therefore k_{AC}=\dfrac{\sqrt{2}p-0}{p-2p}=-\sqrt{2}$.

16.$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 【**解析**】已知 $f(x)=\log_3(x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{2e^x}{e^x+1}$，$f(-x)=\log_3(-x+\sqrt{x^2+1})+\dfrac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$，

则 $f(x)+f(-x)=2$，故函数 $f(x)$ 在定义域内为非奇非偶函数，令 $h(x)=f(x)-1$，

则 $h(x)+h(-x)=f(x)-1+f(-x)-1=0$，则 $h(x)$ 在定义域内为奇函数，

设 $h(x)$ 的最大值为 t，则最小值为 $-t$，则 $f(x)$ 的最大值为 $M=t+1$，最小值为 $m=-t+1$，

则 $M+m=2$，$\therefore g(x)=2x+\dfrac{1}{(2x-1)^3}$，

$g(x)+g(a-x)=2x+\dfrac{1}{(2x-1)^3}+2a-2x+\dfrac{1}{[2(a-x)-1]^3}=2a+\dfrac{[2(a-x)-1]^3+(2x-1)^3}{(2x-1)^3\cdot[2(a-x)-1]^3}$

$=2a+\dfrac{[2(a-x)-1+2x-1]\{[2(a-x)-1]^2-[2(a-x)-1](2x-1)+(2x-1)^2\}}{(2x-1)^3\cdot[2(a-x)-1]^3}$

$=2a+\dfrac{2(a-1)\{[2(a-x)-1]^2-[2(a-x)-1](2x-1)+(2x-1)^2\}}{(2x-1)^3\cdot[2(a-x)-1]^3}$,

∴当 $a=1$ 时，$g(x)+g(1-x)=2$，

∴$g(x)$关于$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$中心对称.

四、解答题（本大题共 **6** 小题，共 **70** 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.**【解析】**(1)$c\sin A=\sqrt{3}a\sin\dfrac{C}{2}\Rightarrow\sin C\sin A-\sqrt{3}\sin A\sin\dfrac{C}{2}=0$，

因为 $\sin A\neq0$，所以 $\sin C=\sqrt{3}\sin\dfrac{C}{2}\Rightarrow\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，…………（3 分）

所以$\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$. …………（5 分）

(2)因为$\triangle ABC$的面积为 $2\sqrt{3}$，所以$\dfrac{1}{2}\times4b\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}b=2\sqrt{3}$，解得 $b=2$，…………（7 分）

由余弦定理得 $c^2=4^2+2^2-2\times4\times2\cos\dfrac{\pi}{3}=12$，解得 $c=2\sqrt{3}$，…………（9 分）

所以$\triangle ABC$的周长为 $a+b+c=2\sqrt{3}+6$. …………（10 分）

18.**【解析】**(1)易得$\begin{cases}2a_1+d=a_1+2d,\\a_1+3d=a_1(a_1+d),\end{cases}$所以 $a_1=d=2$，…………（3 分）

所以 $a_n=2+2(n-1)=2n$. …………（6 分）

(2)由题意，$b_n=n^2$，…………（7 分）

故$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$，

又对 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$ 时，$\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$，…………（9 分）

∴$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}<1+\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}=1+1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}=2-\dfrac{1}{n}$得证. …………（12 分）

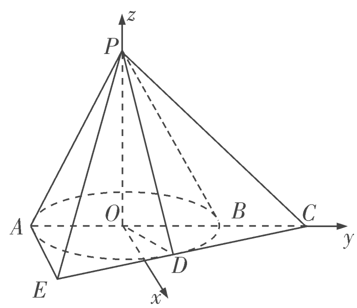
19.**【解析】**(1)由题设，$PO\perp$底面圆 O，又 D 是切线 CE 与圆 O 的切点，

∴$CE\subset$底面圆 O，则 $PO\perp CE$，…………（2 分）

且 $OD\perp CE$，而 $PO\cap OD=O$，∴$CE\perp$平面 POD. …………（4 分）

又 $CE\subset$平面 PED，∴平面 $PDE\perp$平面 POD. …………（5 分）

(2)设 $Ox/\!/AE$，如图，以 O 为原点，$\overrightarrow{Ox}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OP}$分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，



又$\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{CO}{CE}=\dfrac{OD}{EA}$，可得 $AE=CD=ED=\sqrt{3}R$，

∴$P(0,0,2)$，$D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R,\dfrac{R}{2},0\right)$，$E(\sqrt{3}R,-R,0)$，$B(0,R,0)$，

所以$\overrightarrow{PB}=(0,R,-2)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R,-\dfrac{R}{2},0\right)$，$\overrightarrow{PE}=(\sqrt{3}R,-R,-2)$，

若 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$是平面 PBD 的一个法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=Ry-2z=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}Rx-\dfrac{R}{2}y=0,\end{cases}$令 $x=2$，则 $\boldsymbol{m}=(2,2\sqrt{3},\sqrt{3}R)$，…………（7 分）

由于直线 PE 与平面 PBD 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{105}}{35}$，

∴$|\cos\langle\boldsymbol{m},\overrightarrow{PE}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PE}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{PE}|}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}R}{\sqrt{16+3R^2}\cdot\sqrt{4R^2+4}}=\dfrac{\sqrt{105}}{35}$，

解得 $R=2$ 或 $R=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$. …………（9 分）

由题知 $AC=\dfrac{3}{2}OC$，C 为 AC 与平面 PED 的交点，

故点 A 到平面 PED 的距离为点 O 到平面 PED 的距离的$\dfrac{3}{2}$倍，…………（10 分）

又平面 $PDE \perp$ 平面 POD，

所以点 O 到平面 PED 的距离就是点 O 到直线 PD 的距离，

在 $\mathrm{Rt}\triangle POD$ 中，$PO=2$，$OD=R$，故点 O 到直线 PD 的距离为 $\dfrac{2R}{\sqrt{4+R^2}}$， …………………………………………（11 分）

则点 A 到平面 PED 的距离为 $\dfrac{3R}{\sqrt{4+R^2}}$，

∴点 A 到平面 PED 的距离为 $d=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ 或 $d=\dfrac{3}{2}$. …………………………………………（12 分）

20.【解析】(1)依题意，$b=40$，$c=40$，$e=50$，$f=50$，$n=120$，

零假设为 H_0：球队胜利与甲球员参赛无关，

则观测值 $\chi^2=\dfrac{120\times(30\times10-40\times40)^2}{70\times50\times70\times50}\approx16.56>10.828$， …………………………………………（3 分）

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，

即认为该球队胜利与甲球员参赛有关联，此推断犯错误的概率不超过 0.001. …………………………………………（5 分）

(2)①设 A_1 表示“甲球员担当前锋”；A_2 表示“甲球员担当中场”；A_3 表示“甲球员担当后卫”；B 表示“球队输掉某场比赛”，

有 $P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.5$，$P(A_3)=0.3$，$P(B|A_1)=P(B|A_2)=0.2$，$P(B|A_3)=0.7$，

则 $P(B)=P(A_1B)+P(A_2B)+P(A_3B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$=0.2\times0.2+0.5\times0.2+0.3\times0.7=0.35$，

所以该球队某场比赛输球的概率是 0.35. …………………………………………（7 分）

②由①知，球队输的条件下，甲球员担当中场的概率 $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2B)}{P(B)}=\dfrac{0.5\times0.2}{0.35}=\dfrac{2}{7}$. …………………………………………（9 分）

③由①知，球队输的条件下，甲球员担当前锋的概率 $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{0.2\times0.2}{0.35}=\dfrac{4}{35}$， …………………………………………（10 分）

球队输的条件下，甲球员担当后卫的概率 $P(A_3|B)=\dfrac{P(A_3B)}{P(B)}=\dfrac{0.3\times0.7}{0.35}=\dfrac{3}{5}$， …………………………………………（11 分）

由②知，$P(A_1|B):P(A_2|B):P(A_3|B)=\dfrac{4}{35}:\dfrac{2}{7}:\dfrac{3}{5}=4:10:21$，

所以，应该多让甲球员担任前锋. …………………………………………（12 分）

21.【解析】(1)因为 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$，$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$，$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$， …………………………………………（2 分）

当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，无极小值； …………………………………………（4 分）

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$g'(x)>0$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 单调递减，

当 $x=\mathrm{e}$ 时，$g(x)$ 有极大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，无极小值. …………………………………………（6 分）

(2)令 $h(x)=x^2g(x)+2-\mathrm{e}^xf(x)+\dfrac{2}{x}=x\ln x+2-x+\dfrac{2}{x}\ (x>0)$，

则 $h'(x)=\ln x-\dfrac{2}{x^2}\ (x>0)$，

令 $r(x)=\ln x-\dfrac{2}{x^2}\ (x>0)$，则 $r'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^3}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $r(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $r(1)=\ln 1-\dfrac{2}{1^2}=-2<0$，$r(\mathrm{e})=\ln \mathrm{e}-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}>0$，

所以存在 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，使得 $r(x_0)=0$，即 $\ln x_0=\dfrac{2}{x_0^2}\ (x_0\in(1,\mathrm{e}))$，

所以 $x\in(0,x_0)$ 时，$r(x)<0$，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$r(x)>0$，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增， …………………………………………（9 分）

$h(x)_{\min}=h(x_0)=x_0\ln x_0+2-x_0+\dfrac{2}{x_0}=x_0\cdot\dfrac{2}{x_0^2}+2-x_0+\dfrac{2}{x_0}=2-x_0+\dfrac{4}{x_0}\ (x_0\in(1,\mathrm{e}))$，

令 $m(x)=2-x+\frac{4}{x}(x\in(1,\mathrm{e}))$，则 $m'(x)=-1-\frac{4}{x^2}<0$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上恒成立，

所以 $m(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减，所以 $m(x)>m(\mathrm{e})=2-\mathrm{e}+\frac{4}{\mathrm{e}}>0$，

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=2-x_0+\frac{4}{x_0}>0$，

所以 $x^2g(x)+2>\mathrm{e}^xf(x)-\frac{2}{x}$. ………………………………………………………………………………（12 分）

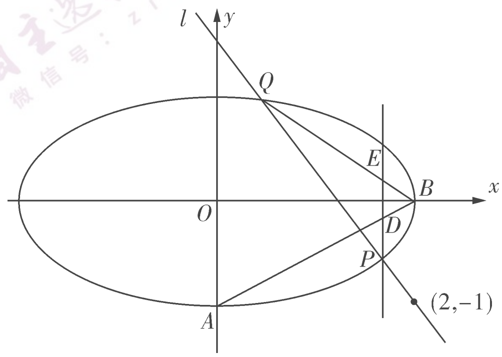
22.【解析】(1) 由题可得，$|AB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}$，所以 $a^2+b^2=5$，………………………………………………（2 分）

因为椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

结合椭圆中 $b^2=a^2-c^2$ 可知，$a=2,b=1$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………………………（5 分）

(2) 依题意作右图：



设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $y=kx+m$ ，

将点 $(2,-1)$ 代入得：$m=-2k-1$，∴ 直线 l：$y=kx-(2k+1)$.

由于椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，∴ $A(0,-1)$，$B(2,0)$，

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx-(2k+1),\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-8k(2k+1)x+16k^2+16k=0$，

由 $\Delta=-64k>0$，得 $k<0$，

$x_1+x_2=\frac{16k^2+8k}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{4k^2+1}$，…………………………（8 分）

直线 AB 的方程为：$x-2y-2=0$，

直线 BQ 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

$D\left(x_1,\frac{x_1-2}{2}\right)$，$E\left(x_1,\frac{y_2}{x_2-2}(x_1-2)\right)$，

运用 $\begin{cases}y_1=kx_1-(2k+1),\\ y_2=kx_2-(2k+1),\\ x_1+x_2=\frac{16k^2+8k}{4k^2+1}, ①\\ x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{4k^2+1},\end{cases}$

易证得：$\frac{y_2}{x_2-2}+\frac{y_1}{x_1-2}=1$，② ……………………………………………………………………（10 分）

下面证明②：

$(x_1-2)y_2+(x_2-2)y_1-(x_1-2)(x_2-2)$

$=(x_1-2)[kx_2-(2k+1)]+(x_2-2)[kx_1-(2k+1)]-(x_1-2)(x_2-2)$

$=(2k-1)x_1x_2-(4k-1)(x_1+x_2)+8k$，

运用①中的韦达定理：

$(2k-1)x_1x_2-(4k-1)(x_1+x_2)+8k$

$=(2k-1)\frac{16k^2+16k}{4k^2+1}-(4k-1)\frac{16k^2+8k}{4k^2+1}+8k$

$=\frac{32k^3+32k^2-16k^2-16k-64k^3-32k^2+16k^2+8k+32k^3+8k}{4k^2+1}=0$，

即②成立，

∴ $y_1+\frac{y_2}{x_2-2}(x_1-2)=2\times\frac{x_1-2}{2}$，即点 E 和 P 的纵坐标之和等于 D 点纵坐标的 2 倍，

∴ D 点是线段 EP 的中点，即 $\frac{|DE|}{|PD|}=1$，

综上，$\frac{|DE|}{|PD|}=1$，故为定值. ………………………………………………………………………（12 分）