

石景山区 2017 年高三统一练习

数 学 (文) 试 卷

考	1. 本试卷共 6 页, 共三道大题, 20 道小题, 满分 150 分. 考试时间 120 分钟.
生	2. 在答题卡上准确填写学校名称、姓名和准考证号.
须	3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上, 选择题、作图题请用 2B 铅笔作答, 其
知	他试题请用黑色字迹签字笔作答, 在试卷上作答无效.

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A = \{x | 2x - 1 < 0\}$, $B = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$, 那么 $A \cap B$ 等于 ()

A. $\{x | x \geq 0\}$

B. $\{x | x \leq 1\}$

C. $\{x | 0 < x < \frac{1}{2}\}$

D. $\{x | 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$

2. 以 $(-1, 1)$ 为圆心且与直线 $x - y = 0$ 相切的圆的方程是 ()

A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

3. 下列函数中, 偶函数是 ()

A. $y = 2^x - \frac{1}{2^x}$

B. $y = x \sin x$

C. $y = e^x \cos x$

D. $y = x^2 + \sin x$

4. 设 $\theta \in \mathbb{R}$, “ $\sin \theta = \cos \theta$ ”是“ $\cos 2\theta = 0$ ”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件



5. 我国南宋数学家秦九韶（约公元 1202—1261 年）

给出了求 $n (n \in \mathbf{N}^*)$ 次多项式 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

当 $x = x_0$ 时的值的一种简捷算法。该算法被后人命名为“秦九

韶算法”，例如，可将 3 次多项式改写为：

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = ((a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

然后进行求值。

运行如图所示的程序框图，能求得多项式（ ）的值。

A. $x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

B. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

C. $x^3 + x^2 + 2x + 3$

D. $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

6. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥

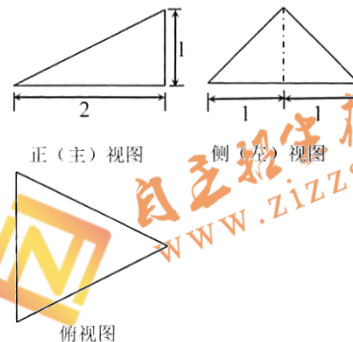
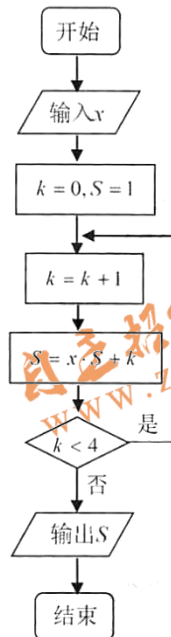
的表面积是（ ）

A. $2 + \sqrt{5}$

B. $4 + \sqrt{5}$

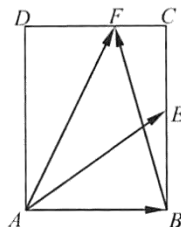
C. $2 + 2\sqrt{5}$

D. 5





7. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{2}$ ， $BC = 2$ ，
点 E 为 BC 的中点，点 F 在边 CD 上，
若 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \sqrt{2}$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}$ 的值是 ()



- A. $2 - \sqrt{2}$ B. 1
C. $\sqrt{2}$ D. 2

8. 21 个人按照以下规则表演节目：他们围坐成一圈，按顺序从 1 到 3 循环报数，报数字“3”的人出来表演节目，并且表演过的人不再参加报数。那么在仅剩两个人没有表演过节目的时候，共报数的次数为 ()

- A. 19 B. 38 C. 51 D. 57

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

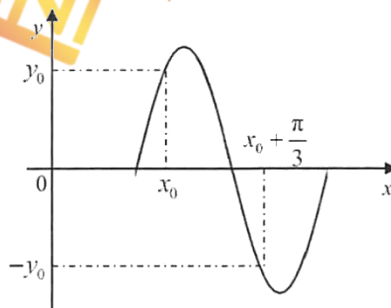
9. 若复数 $\frac{a+i}{1-i}$ 是纯虚数，则实数 $a =$ _____.

10. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2x - 3y + 6 \geq 0, \\ x \leq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 那么 $z = y - x$ 的最大值是 _____.

11. 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的右顶点重合，则 $p =$ _____.

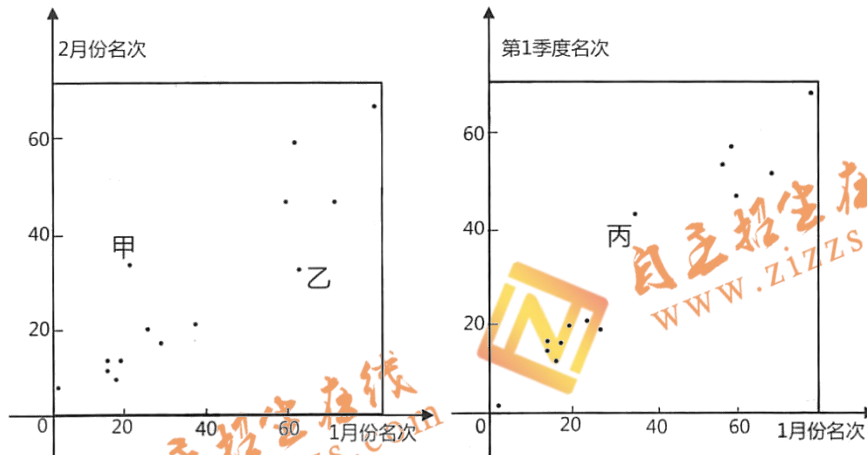
12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \geq 0, \\ x - x^2, & x < 0. \end{cases}$ 若 $f(a) > f(2-a)$ ，则 a 的取值范围是 _____.

13. 若函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的部分图象如图所示，则 $\omega =$ _____.





14. 在环境保护部公布的 2016 年 74 城市 PM2.5 月均浓度排名情况中，某 14 座城市在 74 城的排名情况如下图所示，甲、乙、丙为某三座城市。



从排名情况看，

① 在甲、乙两城中，2 月份名次比 1 月份名次靠前的城市是_____；

② 在第 1 季度的三个月中，丙城市的名次最靠前的月份是_____。

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本小题共 13 分)

数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + c \cdot 2^n$ (c 是常数， $n = 1, 2, 3, \dots$)，

且 a_1, a_2, a_3 成公比不为 1 的等比数列。

(I) 求 c 的值；

(II) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

16. (本小题共 13 分)

已知 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的三条对边，且 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ 。

(I) 求角 C 的大小；

(II) 求 $\cos A + \cos B$ 的最大值。

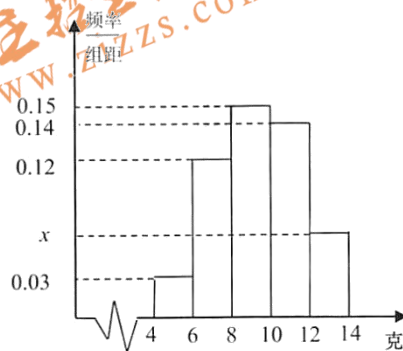


17. (本小题共 13 分)

“累积净化量 (CCM)”是空气净化器质量的一个重要衡量指标，它是指空气净化器从开始使用到净化效率为 50% 时对颗粒物的累积净化量，以克表示。根据 GB/T18801-2015《空气净化器》国家标准，对空气净化器的累计净化量 (CCM) 有如下等级划分：

累积净化量 (克)	(3, 5]	(5, 8]	(8, 12]	12 以上
等级	P1	P2	P3	P4

为了了解一批空气净化器 (共 2000 台) 的质量，随机抽取 n 台机器作为样本进行估计，已知这 n 台机器的累积净化量都分布在区间 $(4, 14]$ 中。按照 $(4, 6]$, $(6, 8]$, $(8, 10]$, $(10, 12]$, $(12, 14]$ 均匀分组，其中累积净化量在 $(4, 6]$ 的所有数据有：4.5, 4.6, 5.2, 5.3, 5.7 和 5.9，并绘制了如下频率分布直方图：



(I) 求 n 的值及频率分布直方图中的 x 值；

(II) 以样本估计总体，试估计这批空气净化器 (共 2000 台) 中等级为 P2 的空气净化器有多少台？

(III) 从累积净化量在 $(4, 6]$ 的样本中随机抽取 2 台，求恰好有 1 台等级为 P2 的概率。



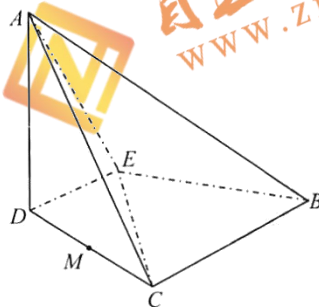
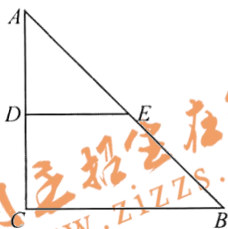
18. (本小题共 14 分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 为直角, $AC = BC = 4$. 沿 $\triangle ABC$ 的中位线 DE , 将平面 ADE 折起, 使得 $\angle ADC = 90^\circ$, 得到四棱锥 $A-BCDE$.

(I) 求证: $BC \perp$ 平面 ACD ;

(II) 求三棱锥 $E-ABC$ 的体积;

(III) M 是棱 CD 的中点, 过 M 做平面 α 与平面 ABC 平行, 设平面 α 截四棱锥 $A-BCDE$ 所得截面面积为 S , 试求 S 的值.



19. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = e^x$.

(I) 过原点作曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求切线方程;

(II) 当 $x > 0$ 时, 讨论曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = mx^2 (m > 0)$ 公共点的个数.

20. (本小题共 14 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, 1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 设直线 $l: y = \frac{1}{2}x + m$ 与椭圆 E 交于 A, C 两点, 以 AC 为对角线作正方形 $ABCD$.

记直线 l 与 x 轴的交点为 N , 问 B, N 两点间距离是否为定值? 如果是, 求出定值; 如果不是, 请说明理由.

石景山区 2017 年高三统一练习

数学（文）试卷答案及评分参考

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	A	A	C	C	D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

题号	9	10	11	12	13	14
答案	1	3	4	$a > 1$	3	乙，二月份

三、解答题共 6 小题，共 80 分。

15. (本小题满分 13 分)

解：(I) $\because a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + c \cdot 2^n$

$$\therefore a_2 = a_1 + c = 2 + 2c, \quad a_3 = a_2 + c \cdot 2^2 = 2 + 6c.$$

依题意， a_1, a_2, a_3 成公比不为 1 的等比数列，

$$\therefore a_2^2 = a_1 a_3, \quad \text{即：} (2 + 2c)^2 = 2(2 + 6c),$$

化简，得： $c^2 - c = 0$ ，

解得， $c = 0$ 或 $c = 1$ 。

由于公比不为 1，因此， $c = 1$6 分

(II) 由 (I) 可知： $a_{n+1} = a_n + 2^n$ 。

$$\text{因此，} a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 2^2$$

$$a_4 = a_3 + 2^3$$

.....

$$a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}, \quad (n \geq 2, \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^+)$$

$$\text{“叠加”：} a_n = a_1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2 + \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^n \quad (n \geq 2 \text{ 且 } n \in \mathbf{N}^+).$$

$$\because a_1 = 2 \therefore n=1 \text{ 时也满足 } a_n = 2^n.$$

故，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为： $a_n = 2^n \quad (n \in \mathbf{N}^+)$13 分



16. (本小题满分 13 分)

解：(I) 因为 $c^2 = a^2 + b^2 - ab$,

$$\text{所以 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - ab}{2ab} = \frac{1}{2}.$$

又因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$6 分

(II) 由 (I) 知 $C = \frac{\pi}{3}$,

又 $A + B + C = \pi$,

所以 $B = \frac{2\pi}{3} - A$ 且 $A \in (0, \frac{2\pi}{3})$,

故 $\cos A + \cos B = \cos A + \cos(\frac{2\pi}{3} - A)$

$$= \cos A + \cos \frac{2\pi}{3} \cos A + \sin \frac{2\pi}{3} \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A = \sin(\frac{\pi}{6} + A).$$

又 $A \in (0, \frac{2\pi}{3})$, $\frac{\pi}{6} + A \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$,

所以当 $\frac{\pi}{6} + A = \frac{\pi}{2}$ 即 $A = \frac{\pi}{3}$ 时, $\cos A + \cos B$ 的最大值为 1.13 分

17. (本小题 13 分)

解：(I) 因为在 $(4, 6]$ 之间的数据一共有 6 个,

再由频率分布直方图可知: 落在 $(4, 6]$ 之间的频率为 $0.03 \times 2 = 0.06$.

$$\text{因此, } n = \frac{6}{0.06} = 100.$$

$$(0.03 + x + 0.12 + 0.14 + 0.15) \times 2 = 1 \therefore x = 0.06. \text{4 分}$$



(II) 由频率分布直方图可知：落在 $(6,8]$ 之间共： $0.12 \times 2 \times 100 = 24$ 台，

又因为在 $(5,6]$ 之间共 4 台，

$\therefore$ 落在 $(5,8]$ 之间共 28 台，

故，这批空气净化器等级为 $P2$ 的空气净化器共有 560 台。.....9 分

(III) 设“恰好有 1 台等级为 $P2$ ”为事件 B

依题意，落在 $(4,6]$ 之间共有 6 台，记为： $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ，属于国标 $P2$ 级

有 4 台，我们记为： A_3, A_4, A_5, A_6 ，

则从 $(4,6]$ 中随机抽取 2 个，所有可能的结果有 15 种，它们是： $(A_1, A_2), (A_1, A_3),$

$(A_1, A_4), (A_1, A_5), (A_1, A_6), (A_2, A_3), (A_2, A_4), (A_2, A_5), (A_2, A_6), (A_3, A_4), (A_3, A_5),$

$(A_3, A_6), (A_4, A_5), (A_4, A_6), (A_5, A_6),$

而事件 B 的结果有 8 种，它们是： $(A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, A_5), (A_1, A_6), (A_2, A_3), (A_2, A_4),$

$(A_2, A_5), (A_2, A_6).$

因此事件 B 的概率为 $P(B) = \frac{8}{15}$13 分

18. (本小题 14 分)

(I) 证明：因为 $DE \parallel BC$ ，且 $\angle C = 90^\circ$ ，

所以 $DE \perp AD$ ，同时 $DE \perp DC$ ，

又 $AD \cap DC = D$ ，所以 $DE \perp$ 面 ACD 。

又因为 $DE \parallel BC$ ，

所以 $BC \perp$ 平面 ACD 。.....4 分



(II) 由(I)可知： $BC \perp$ 平面 ACD ，又 $AD \subset$ 平面 ADC ，

所以 $AD \perp BC$ ，

又因为 $\angle ADC = 90^\circ$ ，所以 $AD \perp DC$ 。

又因为 $BC \cap DC = C$ ，所以 $AD \perp$ 平面 $BCDE$ 。

所以， $V_{E-ABC} = V_{A-EBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle EBC} \times AD$ 。

依题意， $S_{\triangle EBC} = \frac{1}{2} BC \times CD = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$ 。

所以， $V_{E-ABC} = \frac{1}{3} \times 4 \times 2 = \frac{8}{3}$ 。 9 分

(III) 分别取 AD ， EA ， AB 的中点 N ， P ， Q ，并连接 MN ， NP ， PQ ， QM 。

因为平面 $\alpha \parallel$ 平面 ACD ，所以平面 α 与平面 ACD 的交线平行于 AC ，

因为 M 是中点，所以平面 α 与平面 ACD 的交线是 $\triangle ACD$ 的中位线 MN 。

同理可证，四边形 $MNPQ$ 是平面 α 截四棱锥 $A-BCDE$ 的截面。

即： $S = S_{MNPQ}$ 。

由(I)可知： $BC \perp$ 平面 ACD ，所以 $BC \perp AC$ ，

又 $\because QM \parallel AC, MN \parallel BC \therefore QM \perp MN$ 。

$\therefore$ 四边形 $MNPQ$ 是直角梯形。

在 $Rt\triangle ADC$ 中， $AD=CD=2 \therefore AC=2\sqrt{2}$ 。

$MN = \frac{1}{2} AC = \sqrt{2}$ ， $NP = \frac{1}{2} DE = 1$ ， $MQ = \frac{1}{2} (BC + DE) = 3$ 。

$\therefore S = (1+3) \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$ 。 14 分



19. (本小题 13 分)

解：(I) 由题意，设切点为 $M(x_0, y_0)$ ，由题意可得

$$f'(x_0) = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0}, \text{ 即 } e^{x_0} = \frac{e^{x_0}}{x_0}, \text{ 解得 } x_0 = 1, \text{ 即切点 } M(1, e).$$

$$\text{所以 } k = \frac{e-0}{1-0} = e, \text{ 所以切线方程为 } y = ex. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 当 $x > 0, m > 0$ 时，曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = mx^2 (m > 0)$ 的公共点个数

即方程 $f(x) = mx^2$ 根的个数.

$$\text{由 } f(x) = mx^2 \text{ 得 } m = \frac{e^x}{x^2}.$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{e^x}{x^2}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{xe^x(x-2)}{x^4}, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 解得 } x = 2.$$

随 x 变化时， $g'(x)$ ， $g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	极小值 $g(2)$	$\nearrow$

其中 $g(2) = \frac{e^2}{4}$ ，所以 $g(2)$ 为 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值.

所以对曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = mx^2 (m > 0)$ 公共点的个数，讨论如下：

当 $m \in (0, \frac{e^2}{4})$ 时，有 0 个公共点； 当 $m = \frac{e^2}{4}$ 时，有 1 个公共点；

当 $m \in (\frac{e^2}{4}, +\infty)$ 时，有 2 个公共点. \dots\dots\dots 13 分



20. (本小题满分 14 分)

解：(I) 设椭圆的半焦距为 c .

因为点 $(0, 1)$ 在椭圆 E 上, 所以 $b = 1$.

$$\text{故 } a^2 - c^2 = 1.$$

又因为 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $c = \sqrt{3}$, $a = 2$.

所以椭圆 E 的标准方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$5 分

(II) 设 $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 线段 AC 中点为 $M(x_0, y_0)$.

联立 $y = \frac{1}{2}x + m$ 和 $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, 得: $x^2 + 2mx + 2m^2 - 2 = 0$.

由 $\Delta = (2m)^2 - 4(2m^2 - 2) = 8 - 4m^2 > 0$, 可得 $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

所以 $x_1 + x_2 = -2m$, $x_1 x_2 = 2m^2 - 2$.

所以 AC 中点为 $M(-m, \frac{1}{2}m)$.

$$\text{弦长 } |AC| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]} = \sqrt{10 - 5m^2},$$

又直线 l 与 x 轴的交点 $N(-2m, 0)$.

$$\text{所以 } |MN| = \sqrt{(-m + 2m)^2 + (\frac{1}{2}m)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}m^2}.$$

$$\text{所以 } |BN|^2 = |BM|^2 + |MN|^2 = \frac{1}{4}|AC|^2 + |MN|^2 = \frac{5}{2}.$$

所以 B 、 N 两点间距离为定值 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

.....14 分