

2023 - 2024 学年第一学期福州市高中毕业班开门考

数学试题

(完卷时间: 120 分钟; 满分: 150 分)

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分。第 I 卷 1 到 2 页, 第 II 卷 3 至 4 页。

注意事项:

1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。
2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。第 II 卷用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答, 在试题卷上作答, 答案无效。
3. 考试结束, 考生必须将答题卡交回。

第 I 卷

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $\frac{1}{z} = 1 - i$, 则在复平面内, z 对应的点在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【考查意图】本小题以复数为载体, 主要考查复数的基本运算、几何意义等基础知识; 考查运算求解能力、推理论证能力; 考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养, 体现基础性。

【答案】A.

【解析】由 $\frac{1}{z} = 1 - i$ 得 $z = \frac{1}{1 - i} = \frac{1 + i}{2}$, 故选 A.

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 < 1\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(0, 1)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

【考查意图】本小题以不等式为载体, 主要考查集合运算等基础知识; 考查运算求解能力、推理论证能力; 考查数学运算、逻辑推理等核心素养, 体现基础性。

【答案】C.

【解析】 $A = \{x | -1 < x < 1\}$, $B = \{x | x > 0\}$, 故 $A \cup B = (-1, +\infty)$, 故选 C.

3. 已知点 $P(x_0, 2)$ 在抛物线 $C: y^2 = 4x$ 上, 则 P 到 C 的准线的距离为

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

【考查意图】本小题以抛物线为载体，主要考查抛物线的图象和性质、直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查运算求解能力、推理论证能力；考查数形结合思想、化归与转化思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性。

【答案】C.

【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线为 $x = -1$ ，由 $P \in C$ 得 $x_0 = 1$ ，故 P 到准线的距离为 2，应选 C.

4. “二十四节气”是中国古代劳动人民伟大的智慧结晶，其划分如图所示. 小明打算在网上搜集一些与二十四节气有关的古诗. 他准备在春季的 6 个节气与夏季的 6 个节气中共选出 3 个节气，若春季的节气和夏季的节气各至少选出 1 个，则小明选取节气的不同情况的种数是



- A. 90 B. 180
C. 270 D. 360

【考查意图】本小题以二十四节气为载体，主要考查排列与组合等基础知识；考查运算求解能力、推理论证能力和应用意识；考查数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性和应用性。

【答案】B.

【解析】根据题意可知，小明可以选取 1 春 2 夏或 2 春 1 夏，其中 1 春 2 夏的不同情况有： $C_6^1 \cdot C_6^2 = 90$ 种；2 春 1 夏的不同情况有： $C_6^2 \cdot C_6^1 = 90$ 种，所以小明选取节气的不同情况有： $90 + 90 = 180$ 种. 应选 B.

5. 一个正四棱台形油槽可以装煤油 $190\,000\text{ cm}^3$ ，其上、下底面边长分别为 60 cm 和 40 cm ，则该油槽的深度为

- A. $\frac{75}{4}\text{ cm}$ B. 25 cm C. 50 cm D. 75 cm

【考查意图】本小题以正四棱台形油槽为载体，主要考查空间几何体的体积等基础知识；考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力；考查数形结合思想、化归与转化思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和应用性。

【答案】D.

【解析】设正四棱台的高，即深度为 $h\text{ cm}$ ，依题意，得 $190\,000 = \frac{h}{3}(60^2 + 40^2 + 60 \times 40)$ ，解得 $h = 75$ ，应选 D.

6. 一个袋子中有大小和质地相同的 4 个球，其中有 2 个红球，2 个黄球，每次从中随机摸出 1 个球，摸出的球不再放回. 则第二次摸到黄球的条件下，第一次摸到红球的概率为

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【考查意图】本小题主要考查条件概率、全概率公式等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力与创新意识；考查化归与转化思想；考查数学建模、逻辑推理、数据分析等核心素养，体现综合性、应用性与创新性。

【答案】C.

【解析】解法一：记第 i 次摸到红球为事件 A_i ，摸到黄球为事件 B_i ($i=1,2$)，则

$$P(B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \text{ 故 } P(A_1|B_2) = \frac{P(A_1B_2)}{P(B_2)} = \frac{2}{3}. \text{ 应选 C.}$$

解法二：记第 i 次摸到红球为事件 A_i ，摸到黄球为事件 B_i ($i=1,2$)。由抽签的公平性可知 $P(B_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ，又 $P(A_1B_2) = \frac{2 \times 2}{4 \times 3} = \frac{1}{3}$ ，所以 $P(A_1|B_2) = \frac{P(A_1B_2)}{P(B_2)} = \frac{2}{3}$ 。应选 C.

7. 已知 $a = \frac{1}{e}$ ， $b = \ln \sqrt{2}$ ， $c = \ln \sqrt[5]{5}$ ，则

- A. $a > b > c$ B. $b > c > a$ C. $a > c > b$ D. $c > a > b$

【考查意图】本小题以数的大小比较为载体，主要考查函数与导数等基础知识；考查运算求解能力、推理论证能力、应用意识；考查数学建模、数学运算、逻辑推理等核心素养，体现基础性、应用性和综合性。

【答案】A.

【解答】解法一： $a = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$ ， $b = \ln \sqrt{2} = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$ ， $c = \ln \sqrt[5]{5} = \frac{\ln 5}{5}$ ，令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，

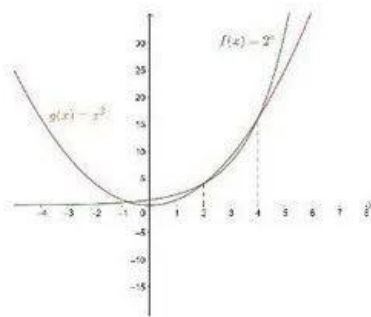
$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，当 $x \geq e$ 时， $f'(x) \leq 0$ ，故 $f(x)$ 在区间 $[e, +\infty)$ 上单调递减，所以 $a > b > c$ 。

解法二：因为 $\sqrt{2} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt[10]{32} > \sqrt[10]{25} = \sqrt[10]{5^2}$ ，所以

$\ln \sqrt{2} > \ln \sqrt[10]{5^2}$ ，即 $b > c$ 。

在同一坐标系中作出函数 $f(x) = 2^x$ ， $g(x) = x^2$ 的图象，如图所示，由图可知， $f(e) < g(e)$ ，即 $2^e < e^2$ ，所以

$2^{\frac{e}{2}} < e^{\frac{2}{2}}$ ，即 $2^{\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{2}}$ ，所以 $\frac{1}{2} \ln 2 < \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{e}$ ，即 $b < a$ 。



(令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，当 $0 < x < e$ 时， $f'(x) > 0$ ，故 $f(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上

单调递增，所以 $a = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln 2}{2} = \ln \sqrt{2} = b$.)

综上, $a > b > c$. 应选 A.

8. 若定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的图象在区间 $[0, \pi]$ 上恰有 5 条对称轴, 则 ω 的取值范围为

A. $\left[\frac{17}{4}, \frac{21}{4}\right)$ B. $\left(\frac{17}{4}, \frac{25}{4}\right]$ C. $\left[\frac{17}{4}, \frac{25}{4}\right]$ D. $\left[\frac{33}{4}, \frac{41}{4}\right)$

【考查意图】本小题以三角函数为载体, 考查三角函数的图象与性质、三角恒等变换等基础知识; 考查抽象概括能力、推理论证能力、应用意识; 考查数形结合思想; 考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养, 体现基础性和综合性.

【答案】A.

【解析】由已知, $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$,

令 $\omega x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{(4k+1)\pi}{4\omega}$, $k \in \mathbf{Z}$,

依题意知, 有 5 个整数 k 满足 $0 \leq \frac{(4k+1)\pi}{4\omega} \leq \pi$, 即 $0 \leq 4k+1 \leq 4\omega$, 所以 $k = 0, 1, 2, 3, 4$, 则 $4 \times 4 + 1 \leq 4\omega < 4 \times 5 + 1$, 故 $\frac{17}{4} \leq \omega < \frac{21}{4}$, 应选 A.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某市抽查一周空气质量指数变化情况, 得到一组数据: 80, 76, 73, 82, 86, 75, 81. 以下关于这组数据判断正确的有

A. 极差为 13 B. 中位数为 82 C. 平均数为 79 D. 方差为 124

【考查意图】本小题主要考查极差、中位数、平均数、方差等基础知识; 考查推理论证能力、运算求解能力; 考查化归与转化思想; 考查数据分析等核心素养, 体现基础性.

【答案】AC.

10. 已知圆 $M: x^2 + y^2 = 1$, 直线 $l: y = k(x + \sqrt{3}) - 1$, 则

A. l 恒过定点 $(\sqrt{3}, -1)$ B. 若 l 平分圆周 M , 则 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$
C. 当 $k = \sqrt{3}$ 时, l 与圆 M 相切 D. 当 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$ 时, l 与圆 M 相交

【考查意图】本小题以直线与圆为载体, 考查直线的方程、圆的方程、直线与圆的位置关系等基础知识; 考查运算求解能力; 考查直观想象、逻辑推理等核心素养; 体现基础性和综合性.

【答案】BC.

【解析】依题意, l 恒过定点 $(-\sqrt{3}, -1)$, 选项 A 错误;

若 l 平分圆周 M , 则 l 经过圆 M 的圆心 $(0,0)$, 代入直线方程得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 选项 B 正确;

圆心 $O(0,0)$ 到 l 的距离 $d = \frac{|\sqrt{3}k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$, 当 $k = \sqrt{3}$ 时, $d = 1 = r$, l 与圆 M 相切, 选项 C

正确; 若 l 与圆 M 相交, 则 $d < 1$, 即 $(\sqrt{3}k-1)^2 < k^2+1$, 即 $0 < k < \sqrt{3}$, 故选项 D 错误.

综上, 应选 BC.

11. 已知函数 $f(x) = x^3 - 3ax + 2$ 有两个极值点. 则

- A. $f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 对称 B. $f(x)$ 的极值之和为 -4
C. $\exists a \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x)$ 有三个零点 D. 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 只有一个零点

【考查意图】本小题以三次函数为载体, 主要考查函数与导数等基础知识; 考查运算求解能力、推理论证能力、应用意识; 考查数学建模、数学运算、逻辑推理等核心素养, 体现基础性、应用性和综合性.

【答案】ACD.

【解答】 $f(x)$ 的图象可由奇函数 $g(x) = x^3 - 3ax$ 的图象向上平移 2 个单位长度得到, 故 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 对称, 选项 A 正确.

设 $f(x)$ 的极值点分别为 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则由对称性可知 $x_1 + x_2 = 0$, 故 $f(x_1) + f(x_2) = 2 \times 2 = 4$, 即 $f(x)$ 的极值之和为 4, 选项 B 错误.

依题意, 方程 $f'(x) = 3x^2 - 3a = 0$ 有两异根, 则 $a > 0$, $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \sqrt{a}]$ 上单调递增, 在区间 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 上单调递减, 在区间 $[\sqrt{a}, +\infty)$ 单调递增. 由图象可知, 当 $f(x_1) > 0 > f(x_2)$ 时, $f(x)$ 的图象与 x 轴有 3 个交点, 即 $f(x)$ 有 3 个零点, 选项 C 正确. 当 $0 < a < 1$ 时, $f(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} + 2 = 2(1 - a\sqrt{a}) > 0$, 此时 $f(x)$ 只有一个零点, 选项 D 正确.

综上, 应选 ACD.

12. 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 2, 球 O 与正四棱柱的上、下底面及侧棱都相切. P 为平面 CDD_1 上一点, 且直线 BP 与球 O 相切, 则

- A. 球 O 的表面积为 4π B. 直线 BD_1 与 BP 夹角等于 45°
C. 该正四棱柱的侧面积为 $16\sqrt{2}$ D. 侧面 ABB_1A_1 与球面的交线长为 2π

【考查意图】本小题以正四棱柱为载体, 主要考查球、直线与平面的位置关系等基础知识; 考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力; 考查化归与转化思想; 考查直观想象、逻辑推理等核心素养, 体现基础性、应用性和综合性.

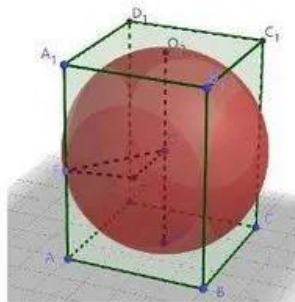
【答案】BCD.

【解答】如图，设球 O 与下底面相切于点 O_1 ，则 $OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，连接 O_1A ，则 $\angle OAO_1$ 为直线 OA 与平面 $ABCD$ 所成的角。因为球 O 与正四棱柱的侧棱相切，所以其半径 $R = OO_1 = O_1A = \sqrt{2}$ ，所以 $S_{表} = 4\pi \cdot 2 = 8\pi$ ，四棱柱的侧面积为 $(2 \times 4) \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ ，故选项 A 错误，C 正确。

依题意， BB_1, BP 均为球 O 的切线， BD_1 经过球心 O ，所以 $\angle B_1BD_1 = \angle PBD_1$ ，又 $B_1D_1 = 2\sqrt{2} = BB_1$ ，所以 $\angle PBD_1 = \angle B_1BD_1 = 45^\circ$ ，选项 B 正确。

对于选项 D，棱 AA_1 的中点 F ，即球 O 与棱 AA_1 的切点应为交线上的点，故交线应为过 F 的圆。截面圆的圆心即为矩形 ABB_1A_1 的中心 E ，在 $\text{Rt}\triangle OEF$ 中， $OF = R = \sqrt{2}$ ， $OE = \frac{1}{2}BC = 1$ ，所以截面圆半径 $r = EF = \sqrt{2-1} = 1$ ，周长为 2π ，该选项正确。

综上，应选 BCD。



第 II 卷

注意事项：

用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答。在试题卷上作答，答案无效。

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $a = (1, 2)$ ， $b = (1 + \lambda, 2 - \lambda)$ ，若 $a \perp b$ ，则实数 λ 的值为_____。

【考查意图】本小题以平面向量为载体，主要考查平面向量的基本运算等基础知识；考查运算求解能力、推理论证能力；考查数学运算、逻辑推理、直观想象等核心素养，体现基础性。

【答案】5。

【解析】由 $a \perp b$ 得 $(1 + \lambda) + 2(2 - \lambda) = 0$ ，解得 $\lambda = 5$ 。

14. 将圆周 16 等分，设每份圆弧所对的圆心角为 θ ，则 $\sin \theta \cos \theta$ 的值为_____。

【考查意图】本小题以圆的等分为载体，考查三角恒等变换等基础知识；考查推理论证能力，抽象概括能力；考查逻辑推理等核心素养；体现基础性与应用性。

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

【解析】依题意，得 $\theta = \frac{\pi}{8}$ ，所以 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

15. 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 同时具有下列三个性质，则 $f(x) =$ _____。（写出一个满足条件的函数即可）

① $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ；② $f'(x)$ 是偶函数；③ 当 $x+y > 0$ 时， $f(x) + f(y) < 0$ 。

【考查意图】本小题以函数的性质为载体，考查函数的奇偶性、函数与导数等基础知识；考查推理论证能力；考查逻辑推理等核心素养；体现基础性、综合性与应用性。

【答案】 $-x$ （答案不唯一， $kx(k < 0)$ 均可）。

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左焦点为 F ，两条渐近线分别为 l_1, l_2 。点 A 在 l_1 上，点 B 在 l_2 上，且点 A 位于第一象限，原点 O 与 B 关于直线 AF 对称。若 $|AF| = 2b$ ，则 C 的离心率为_____。

【考查意图】本小题以双曲线为载体，主要考查双曲线的离心率、双曲线的图象和性质、直线与双曲线的位置关系等基础知识；考查运算求解能力、推理论证能力；考查数形结合思想、化归与转化思想；考查直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和综合性。

【答案】2。

【解答】依题意， l_1 的方程为 $y = \frac{b}{a}x$ ， $AF \perp l_2$ ，设垂足为 P ，则 $|FP| = b$ 。因为 $|AF| = 2b = 2|FP|$ ，所以点 F, A 关于直线 l_2 对称， $\angle FOP = \angle AOP$ ，又 l_1, l_2 关于 y 轴对称，所以 l_1 的倾斜角为 $\frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$ ，故 $\frac{b}{a} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ，所以离心率 $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$ 。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_{n+1} = S_n + 2$ 。

- (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(2) 若 $b_n = \log_2 a_{2n-1}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

【命题意图】本小题主要考查等差数列、等比数列、递推数列及数列求和等基础知识，考查运算求解能力、逻辑推理能力和创新能力等，考查化归与转化思想、分类与整合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养，体现基础性和综合性。满分 10 分。

【解答】(1) 解法一：由 $a_{n+1} = S_n + 2$ 得 $\begin{cases} a_2 = S_1 + 2, \\ a_3 = S_2 + 2, \end{cases}$ 1 分

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，

所以 $\begin{cases} a_1(q-1) = 2, \\ a_1(q^2 - q - 1) = 2, \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} a_1 = 2, \\ q = 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 = -2, \\ q = 0 \end{cases}$ (舍去)。 4 分

所以 $a_n = 2^n$5分

(2) $b_n = \log_2 a_{2n-1} = \log_2 2^{2n-1} = 2n-1$,7分

故 $b_1 = 1$, $b_n - b_{n-1} = 2n-1 - [2(n-1)-1] = 2$ ($n \geq 2$),

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列,

所以 $T_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = \frac{n(1 + 2n-1)}{2} = n^2$10分

解法二: (1) 因为 $a_{n+1} = S_n + 2$, ①

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_{n-1} + 2$, ②1分

①-②得 $a_{n+1} = 2a_n$,2分

所以等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$3分

由①式得 $a_2 = a_1 + 2$, 得 $a_1 = 2$,4分

所以 $a_n = 2^n$5分

(2) $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$

$$= \log_2 a_1 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_{2n-1}$$

$$= \log_2 (a_1 a_3 \dots a_{2n-1}) \dots\dots\dots 7分$$

$$= \log_2 2^{1+3+\dots+(2n-1)}$$

$$= \log_2 2^{\frac{[1+(2n-1)]n}{2}}$$

$$= n^2. \dots\dots\dots 10分$$

18. (本小题满分 12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b = \sqrt{2}$, $B = \frac{\pi}{6}$.

(1) 若 $c = 2$, 求 a ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

【命题意图】本小题主要考查正弦定理、余弦定理及三角恒等变换等基础知识, 考查逻辑推理能力、运算求解能力等, 考查化归与转化思想、函数与方程思想、数形结合思想等, 考查数学运算、逻辑推理等核心素养, 体现基础性和综合性. 满分 12 分.

【解答】解法一: (1) 因为 $b = \sqrt{2}$, $c = 2$, $B = \frac{\pi}{6}$,

根据余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$,

所以 $(\sqrt{2})^2 = a^2 + 2^2 - 4acos\frac{\pi}{6}$,3分

即 $a^2 - 2\sqrt{3}a + 2 = 0$,

解得 $a = \sqrt{3} \pm 1$ 6分

(2) 根据余弦定理, 得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$,

所以 $2 = a^2 + c^2 - 2accos\frac{\pi}{6} = a^2 + c^2 - \sqrt{3}ac \geq 2ac - \sqrt{3}ac = (2 - \sqrt{3})ac$, 8分

(当且仅当 $a = c = \sqrt{3} + 1$ 时取等号), 9分

即 $ac \leq \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = 2(2 + \sqrt{3})$,

所以 $\triangle ABC$ 面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ac \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}ac \leq \frac{1}{4} \times 2(2 + \sqrt{3}) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$,

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ 12分

解法二: (1) 因为 $b = \sqrt{2}$, $c = 2$ 且 $B = \frac{\pi}{6}$,

根据正弦定理, 得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sin C}$, 即 $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 1分

因为 $c > b$, 所以 $C > B$, 所以 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{5\pi}{6}$,

所以 $C = \frac{\pi}{4}$ 或 $C = \frac{3\pi}{4}$, 2分

当 $C = \frac{\pi}{4}$ 时, $\sin A = \sin(B + C) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$,

根据正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

所以 $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + 1$; 4分

当 $C = \frac{3\pi}{4}$ 时, $\sin A = \sin(B + C) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$,

根据正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

所以 $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} - 1$;

综上, $a = \sqrt{3} \pm 1$ 6分

(2) 略, 同解法一.

解法三: (1) 因为 $b = \sqrt{2}$, $c = 2$ 且 $B = \frac{\pi}{6}$,

根据正弦定理, 得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

所以 $\frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sin C}$, 即 $\sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 1分

因为 $c > b$, 所以 $C > B$, 所以 $\frac{\pi}{6} < C < \frac{5\pi}{6}$,

所以 $C = \frac{\pi}{4}$ 或 $C = \frac{3\pi}{4}$, 2分

当 $C = \frac{\pi}{4}$ 时, $A = \pi - (B + C) = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}$,

根据正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

所以 $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} + 1$; 4分

当 $C = \frac{3\pi}{4}$ 时, $A = \pi - (B + C) = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}$,

根据正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

所以 $a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} - 1$;

综上, $a = \sqrt{3} \pm 1$ 6分

(2) 根据正弦定理, 得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}$,

所以 $a = 2\sqrt{2} \sin A$, $c = 2\sqrt{2} \sin C$,

$$\begin{aligned} \text{即 } ac &= (2\sqrt{2})^2 \sin A \sin C = 8 \sin A \sin \left(\frac{5\pi}{6} - A \right) = 8 \sin A \left(\frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \right) \\ &= 2 \sin 2A + 4\sqrt{3} \sin^2 A = 2 \sin 2A + 4\sqrt{3} \times \frac{1 - \cos 2A}{2} = 2 \sin 2A - 2\sqrt{3} \cos 2A + 2\sqrt{3} \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \sin 2A - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2A \right) + 2\sqrt{3} = 4 \sin \left(2A - \frac{\pi}{3} \right) + 2\sqrt{3}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

因为 $0 < A < \frac{5\pi}{6}$, 所以 $-\frac{\pi}{3} < 2A - \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$,

所以当 $2A - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 即 $A = \frac{5\pi}{12}$ 时, $\sin \left(2A - \frac{\pi}{3} \right)$ 取得最大值为 1, 即 ac 最大值为 $4 + 2\sqrt{3}$,

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 面积 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ac \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} ac \leq \frac{1}{4} \times (4 + 2\sqrt{3}) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2},$$

即 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19. (本小题满分 12 分)

国际上常采用身体质量指数 (Body Mass Index, 缩写 BMI) 来衡量人体肥瘦程度, 其计算公式是 $BMI = \frac{\text{体重 (单位: kg)}}{\text{身高}^2 \text{ (单位: m}^2\text{)}}$. 为了解某公司员工的身体肥瘦情况, 研究人员从该公司员工体检数据中, 采用比例分配的分层随机抽样方法抽取了 50 名男员工、30 名女员工的身高和体重数据. 计算得到他们的 BMI 值, 并根据“中国成人的 BMI 数值标准”简称“指标”整理得到如下结果:

指标 人数 性别	偏瘦 (BMI < 18.5)	正常 (18.5 ≤ BMI < 24)	偏胖 (24 ≤ BMI < 28)	肥胖 (BMI ≥ 28)
男	12	17	11	10
女	9	11	7	3

(1) 若该公司男员工有 1 500 名, 则该公司共有多少名员工?

(2) 以频率估计概率, 分别从该公司男、女员工中各随机抽取 2 名员工, 求抽到的员工中至少有一名是肥胖的概率.

【命题意图】 本小题主要考查分层抽样、独立事件的概率、互斥事件、对立事件的概率等基础知识; 考查数学建模能力, 运算求解能力, 逻辑推理能力, 创新能力以及阅读能力等; 考查统计与概率思想、分类与整合思想等; 考查数学抽象, 数学建模和数学运算等核心素养; 体现应用性和创新性. 满分 12 分.

【解】 (1) 设该公司共有 x 名员工,

$$\text{依题意得 } \frac{1500}{x} = \frac{50}{50 + 30}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

解得 $x = 2400$,

所以该公司共有 2400 名员工. 5 分

(2) 依题意, 事件“抽到一名男员工不为肥胖”的概率为 $\frac{40}{50} = \frac{4}{5}$, 事件“抽到一名女员工不为肥胖”的概率为 $\frac{27}{30} = \frac{9}{10}$, 7 分

由事件的独立性, 得抽到的两个男员工都不存在肥胖的概率为 $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$, 8 分

抽到的两个女员工都不存在肥胖的概率为 $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{100}$, 9 分

设事件 M 为“抽到的员工中至少有一名是肥胖”, 则事件 \bar{M} 为“抽到的员工都不存在肥胖”,

所以 $P(\bar{M}) = \frac{81}{100} \times \frac{16}{25} = \frac{324}{625}$, 10 分

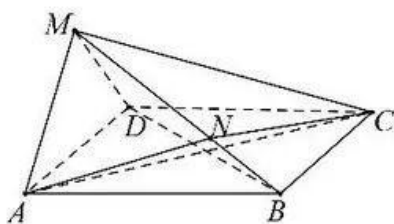
所以 $P(M) = 1 - \frac{324}{625} = \frac{301}{625}$,

所以抽到的员工中至少有一名是肥胖的概率为 $\frac{301}{625}$ 12 分

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在底面为菱形的四棱锥 $M-ABCD$ 中, $AD = BD = MB = 2$, $MA = MD = \sqrt{2}$.

- (1) 求证: 平面 $MAD \perp$ 平面 $ABCD$;
- (2) 已知 $\overline{MN} = 2\overline{NB}$, 求直线 BN 与平面 ACN 所成角的正弦值.



【命题意图】本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系, 直线与平面所成角等基础知识; 考查空间想象能力, 逻辑推理能力, 运算求解能力等; 考查化归与转化思想, 数形结合思想, 函数与方程思想等; 考查直观想象, 逻辑推理, 数学运算等核心素养; 体现基础性和综合性. 满分 12 分.

【解答】(1) 取 AD 的中点为 O , 连结 OM, OB ,
 因为四边形 $ABCD$ 是为菱形, 且 $AD = BD = 2$,
 所以 $\triangle ABD$ 为正三角形, 所以 $BO \perp AD$, 且 $BO = \sqrt{3}$.
 因为 $MA = MD = \sqrt{2}$, 所以 $MO \perp AD$, 2 分

所以 $MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 1$,

又因为 $MB = 2$, 所以 $MO^2 + BO^2 = MB^2$,

所以 $MO \perp BO$, 4 分

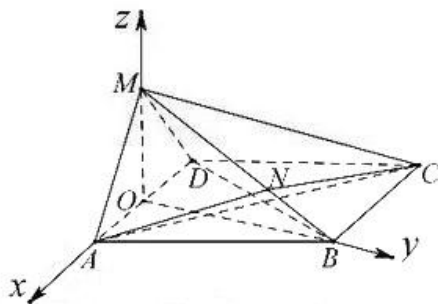
因为 $AD \cap BO = O$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, $BO \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $MO \perp$ 平面 $ABCD$, 5 分

又因为 $MO \subset$ 平面 MAD ,

所以平面 $MAD \perp$ 平面 $ABCD$ 6 分

(2) 由 (1) 知, OA, OB, OM 两两垂直, 故以 O 为坐标原点, 分别以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}$ 为 x, y, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $O - xyz$.



则 $A(1, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), C(-2, \sqrt{3}, 0), M(0, 0, 1), N\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 7 分

所以 $\overrightarrow{CA} = (3, -\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{CN} = \left(2, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right), \overrightarrow{CB} = (2, 0, 0)$,

设平面 ACN 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CA} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CN} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 3x - \sqrt{3}y = 0, \\ 2x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3}z = 0, \end{cases}$$

取 $x = 1$, 则 $\mathbf{n} = (1, \sqrt{3}, -3)$ 9 分

因为 $\overrightarrow{BM} = (0, -\sqrt{3}, 1)$,

则 $\cos \langle \overrightarrow{BM}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{BM}| |\mathbf{n}|} = \frac{-3 - 3}{2 \times \sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$, 11 分

所以直线 BN 与平面 ACN 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ 12 分

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F ，左、右顶点分别为 A, B ，点 C 在 E 上，

$P(4, y_P), Q(4, y_Q)$ 分别为直线 AC, BC 上的点.

- (1) 求 $y_P \cdot y_Q$ 的值;
- (2) 设直线 BP 与 E 的另一个交点为 D ，求证：直线 CD 经过 F 。

【命题意图】本小题主要考查椭圆的标准方程及简单几何性质，直线与圆、椭圆的位置关系，平面向量等基础知识；考查运算求解能力，逻辑推理能力，直观想象能力和创新能力等；考查数形结合思想，函数与方程思想，化归与转化思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性与创新性。满分 12 分。

【解答】(1) 依题意， $A(-2, 0), B(2, 0)$ 。..... 1 分

设 $C(x_1, y_1)$ ，则 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$ ，

直线 AC 方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$ ，令 $x = 4$ 得 $y_P = \frac{6y_1}{x_1 + 2}$ ，..... 2 分

直线 BC 方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$ ，令 $x = 4$ 得 $y_Q = \frac{2y_1}{x_1 - 2}$ ，..... 3 分

$$\begin{aligned} \text{所以 } y_P y_Q &= \frac{12y_1^2}{x_1^2 - 4} \\ &= \frac{12 \times 3 \left(1 - \frac{x_1^2}{4}\right)}{x_1^2 - 4} \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \\ &= -9, \end{aligned}$$

即 $y_P \cdot y_Q$ 的值为 -9 。..... 5 分

- (2) 设 $D(x_2, y_2), P(4, t)$ ，则

直线 AP 方程为 $y = \frac{t}{6}(x + 2)$ ，直线 BP 的方程为 $y = \frac{t}{2}(x - 2)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{t}{6}(x + 2), \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{ 得 } (t^2 + 27)x^2 + 4t^2x + 4t^2 - 108 = 0, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

所以 $-2x_1 = \frac{4t^2 - 108}{t^2 + 27}$ ，即 $x_1 = \frac{54 - 2t^2}{27 + t^2}$ ，故 $y_1 = \frac{t}{6}(x_1 + 2) = \frac{18t}{27 + t^2}$ 。..... 7 分

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{t}{2}(x - 2), \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{ 得 } (t^2 + 3)x^2 - 4t^2x + 4t^2 - 12 = 0,$$

所以 $2x_2 = \frac{4t^2 - 12}{t^2 + 3}$ ，即 $x_2 = \frac{2t^2 - 6}{t^2 + 3}$ ，故 $y_2 = \frac{t}{2}(x_2 - 2) = \frac{-6t}{t^2 + 3}$ 。..... 8 分

所以 $(x_1 - 1)y_2 - (x_2 - 1)y_1$

$$= \frac{27 - 3t^2}{27 + t^2} \cdot \frac{-6t}{t^2 + 3} - \frac{t^2 - 9}{t^2 + 3} \cdot \frac{18t}{27 + t^2}$$

$$= \frac{-6t(27 - 3t^2 + 3t^2 - 27)}{(t^2 + 3)(27 + t^2)} = 0, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

又 $F(1, 0)$, 所以向量 $\overrightarrow{FC} = (x_1 - 1, y_1)$ 与 $\overrightarrow{FD} = (x_2 - 1, y_2)$ 共线, $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

所以直线 CD 经过 F . $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

解法二: (1) 依题意, $A(-2, 0), B(2, 0)$. $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

设 $C(x_1, y_1)$, 则 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$,

所以 $k_{AC} \cdot k_{BC} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{y_1}{x_1 - 2} \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$$= \frac{y_1^2}{x_1^2 - 4}$$

$$= \frac{3 \left(1 - \frac{x_1^2}{4}\right)}{x_1^2 - 4} \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$= -\frac{3}{4}. \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

即 $-\frac{3}{4} = k_{AP} \cdot k_{BQ} = \frac{y_P}{4 + 2} \cdot \frac{y_Q}{4 - 2}$, 故 $y_P y_Q$ 的值为 -9 . $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2), P(4, t)$.

要证直线 CD 经过 $F(1, 0)$,

只需证向量 $\overrightarrow{FC} = (x_1 - 1, y_1)$ 与 $\overrightarrow{FD} = (x_2 - 1, y_2)$ 共线, $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

即证 $(x_1 - 1)y_2 = (x_2 - 1)y_1$. (*) $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

因为 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1 = \frac{(-2)^2}{4} + \frac{0^2}{3}$, 所以 $k_{AC} = \frac{y_1}{x_1 + 2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x_1 - 2}{y_1} = \frac{y_P}{6}$,

同理可得 $k_{BD} = \frac{y_2}{x_2 - 2} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{x_2 + 2}{y_2} = \frac{y_P}{2}$, $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

所以 $\frac{k_{AC}}{k_{BD}} = \frac{(x_2 - 2)y_1}{(x_1 + 2)y_2} = \frac{1}{3}$, 即 $x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 6y_1 + 2y_2 = 0$, ①

同理可得 $-3x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2y_1 + 6y_2 = 0$, ② $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

① - ② 得 $4x_1 y_2 - 4x_2 y_1 + 4y_1 - 4y_2 = 0$, 即 $(x_1 - 1)y_2 = (x_2 - 1)y_1$. $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

所以 (*) 式成立, 命题得证. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - a$, 记曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处的切线为 l , l 在 x 轴上的截距为 x_2 ($x_2 > 0$).

(1) 当 $x_1 = e$, $a = 1$ 时, 求切线方程;

(2) 证明: $|x_1 - e^a| \geq |x_2 - e^a|$.

【命题意图】 本小题主要考查导数, 函数的单调性、零点、不等式等基础知识; 考查逻辑推理能力, 直观想象能力, 运算求解能力和创新能力等; 考查函数与方程思想, 化归与转化思想, 分类与整合思想等; 考查逻辑推理, 直观想象, 数学运算等核心素养; 体现基础性、综合性和创新性. 满分 12 分.

【解答】 (1) $f'(x) = \frac{1}{x}$, 1 分

当 $x_1 = e$, $a = 1$ 时, $f(x_1) = \ln e - 1 = 0$, 即切点为 $(e, 0)$, 2 分

所以所求切线斜率 $k = f'(e) = \frac{1}{e}$, 3 分

所以所求的切线方程为 $y = \frac{1}{e}(x - e)$, 即 $y = \frac{1}{e}x - 1$ 4 分

(2) 由于 $f(x_1) = \ln x_1 - a$,

所以切线 l 的方程为 $y - (\ln x_1 - a) = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$ 5 分

令 $y = 0$, 得 $-(\ln x_1 - a) = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$, 解得 $x_2 = x_1 - x_1(\ln x_1 - a)$, (*) 6 分

由 $x_2 > 0$, 得 $x_1 < e^{a+1}$ 7 分

构造函数 $g(x) = x - x(\ln x - a)$,

所以 $g'(x) = a - \ln x$,

所以当 $0 < x < e^a$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x > e^a$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减. 故 $g(x)_{\max} = g(e^a) = e^a$.

所以 $x_2 \leq e^a$ 8 分

若 $x_1 \leq e^a$, 由 (*) 式知 $x_1 \leq x_2$,

所以 $x_1 \leq x_2 \leq e^a$,

故 $|x_1 - e^a| \geq |x_2 - e^a|$ 10 分

若 $x_1 > e^a$, 则 $|x_1 - e^a| - |x_2 - e^a| = (x_1 - e^a) - (e^a - x_2) = (x_1 + x_2) - 2e^a$,

所以 $|x_1 - e^a| - |x_2 - e^a| = 2x_1 - x_1(\ln x_1 - a) - 2e^a$.

构造函数 $\varphi(x) = 2x - x(\ln x - a) - 2e^a$ ($e^a < x < e^{a+1}$),

所以 $\varphi'(x) = (1+a) - \ln x > 0$,

故 $\varphi(x)$ 在区间 (e^a, e^{a+1}) 上单调递增,

所以 $\varphi(x) > \varphi(e^a) = 0$,

所以 $2x_1 - x_1(\ln x_1 - a) - 2e^a > 0$, 即

所以 $|x_1 - e^a| - |x_2 - e^a| > 0$, 即 $|x_1 - e^a| > |x_2 - e^a|$.

综上, 不等式成立 $|x_1 - e^a| \geq |x_2 - e^a|$ 成立 (当且仅当 $x_1 = e^a$ 时取等号). 12 分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线