

按秘密级事项管理★启用前

2023 年普通高等学校招生全国统一考试 数学模拟测试

本试卷共 23 题,共 150 分,考试时间 120 分钟,考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项:

1. 答题前,考生先将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写清楚,将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂;非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写,字体工整,笔迹清楚。

3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试卷上答题无效。

4. 作图可先使用铅笔画出,确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5. 保持答题卡清洁,不要折叠,不要弄破、弄皱,不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $(1+i) \cdot z=2$, 则 $z=$

A. $1-i$

B. $1+i$

C. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

D. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

2. 已知集合 $M=\{x|-1 \leq x \leq 4\}$, $N=\{x|x \leq -\frac{a}{2}\}$, 若 $M \cap N=\{x|-1 \leq x \leq 3\}$, 则 $a=$

A. -6

B. -2

C. 2

D. 6

3. 椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{4} = 1 (0 < m < 4)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 则 $m=$

A. 1

B. 2

C. 3

D. $\frac{7}{2}$

4. 已知 $f(x)=e^x - f'(0) \cdot x$, 则 $f(2)=$

A. e^2-4

B. e^2-2

C. e^2-1

D. e^2-e

5. 已知 a, b, c, d 的平均数和方差分别为 5 和 10, 则 $a, b, c, d, 5$ 的方差为

A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

◎ 数学卷(四) 第 1 页(共 8 页)



6. 已知 $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{3}{8}$, $\alpha \in (2\pi, 3\pi)$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$

A. $-\frac{\sqrt{11}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{11}}{4}$

C. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{BD} = -2\vec{CD}$, $\vec{AE} = \vec{ED}$, 则 $\vec{BE} =$

A. $\frac{5}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}$

B. $-\frac{5}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$

C. $\frac{5}{6}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$

D. $-\frac{5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

8. 已知 $a, b \in (1, +\infty)$, 且 $\log_b b + \log_a a = \frac{5}{2}$, $b \ln a = \sqrt{\ln b}$, 则如图

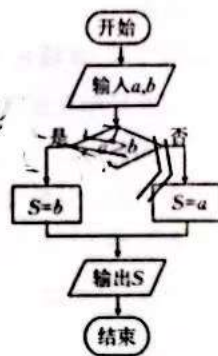
所示的程序框图输出的 $S =$

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. 3

D. 4



9. 若四棱锥 $E-ABCD$ 的棱 AB, BC 的长均为 2, 其余各棱长均为 $\sqrt{2}$, 则该四棱锥的高为

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 1

10. 已知抛物线 $C: y = \frac{x^2}{4}$, 直线 $l_1: y = -2$, $l_2: 3x - 4y - 6 = 0$, M 为 C 上的动点, 则点

M 到 l_1 与 l_2 的距离之和的最小值为

A. 3

B. $\frac{5}{2}$

C. 2

D. $\frac{7}{2}$



11. 已知函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 且 $f(x+4) + f(x) = 0$, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f(x) = \frac{2^x + a}{2^x + 1}$, 则 $f(-33), f(19), f(40)$ 的大小关系为

- A. $f(-33) < f(19) < f(40)$
- B. $f(40) < f(19) < f(-33)$
- C. $f(-33) < f(40) < f(19)$
- D. $f(40) < f(-33) < f(19)$

12. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期 $T < \pi$, $f(\frac{\pi}{5}) = 1$, 且 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{10}$ 处取得最大值. 现有下列四个结论: ① $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; ② 若函数 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4})$ 上存在零点, 则 ω 的最小值为 $\frac{35}{2}$; ③ 函数 $f(x)$ 在 $(\frac{3\pi}{20}, \frac{11\pi}{15})$ 上一定存在零点, 其中结论正确的个数为

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸, 是中国古老的汉族传统

民间艺术之一. 它历史悠久, 风格独特, 深受国内外人士所喜爱.

为了测算某窗花中文字和花纹 (如图中阴影部分所示) 的面积,

作一个半径为 4 的圆将其包含在内, 并向该圆内随机投掷 2400

个点, 已知恰有 1350 个点落在阴影部分, 据此可估计该窗花中文字和花纹的面积是 _____.



14. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $a = 2\sqrt{6}, b = 6, B = \frac{\pi}{3}$, 则 $c =$ _____.

15. 已知正三棱台 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, $A_1B_1 = AA_1 = 2AB = 4$, 圆柱的一个底面经过 A_1, A, B, B_1, C_1 的中点, 另一个底面的圆心为 $\triangle ABC$ 的中心, 则该圆柱的侧面积为 _____.

16. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, P 为双曲线 C 的渐近线在第一象限部分上的一点, 且 $|F_1P| = |F_1F_2| = 2|PF_2|$, O 为坐标原点, 则双曲线 C 的离心率 $e =$ _____.

数学卷(四) 第 3 页(共 8 页)

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

某公司为响应《中国制造 2025》中提出的坚持“创新驱动、质量为先、绿色发展、结构优化、人才为本”的基本方针, 准备加大研发投资, 市场部对同类产品连续 5 个月的销售单价 x_i 和月销售量 y_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) 的数据进行了统计, 得如下统计表:

月销售单价 x_i /(元/件)	1	2	3	4	5
月销售量 y_i /万件	28	23	19	15	10

(1)建立 y 关于 x 的线性回归方程;

(2)根据(1)的结果, 若该产品成本是 0.5 元/件, 月销售单价 x (其中 $x \in \mathbb{N}^*$) 为何值时, 公司月利润的预测值最大?

·参考公式: 回归方程 $\hat{y} = bx + \hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘法估计公式: $b =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, a = \bar{y} - b \bar{x}$$

18. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_1=9, a_{n+1}=a_n+2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

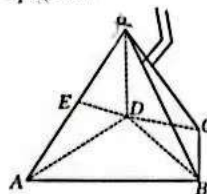
(2) 若 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (14分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle ABD$ 为等边三角形, $\triangle BCD$ 为等腰三角形, $\angle BCD=120^\circ$, E 为 PA 的中点.

(1) 求证: $DE \parallel$ 平面 PBC .

(2) 若 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PD=BC=2$, 求点 D 到平面 PBC 的距离.



数学卷(四) 第5页(共8页)

20. (12分)

已知直线 $l: y=kx+3$, 圆 $M: x^2+y^2+Dx=0$, $Q(3,0)$, 直线 l 和圆 M 交于 A, B 两点.

(1) 当 AB 的中点为 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ 时, 求圆 M 的方程;

(2) 已知圆 M 的方程与(1)中所求圆 M 的方程相同, 若斜率存在且不为 0 的直线 l_1 过点 Q , l_1 与圆 M 交于 E, F 两点, N 为 x 轴正半轴上一点, $\angle ONE = \angle ONF$, $|AB| = \sqrt{14}$, 且直线 l 与线段 MN 相交, 求直线 l 的斜率.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=b$.

(1) 求 a, b 的值及 $f(x)$ 的单调区间.

(2) 已知 $F(x) = \frac{xe^x f(x) - e^x + mx}{x^2 - x}$, 是否存在实数 m , 使得曲线 $y = F(x)$ 恒在直线 $y = x + 1$ 的上方? 若存在, 求出实数 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \alpha \\ y = \sqrt{3}\sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 直线 l 过点 $P(0, 1)$.

(1) 求曲线 C 的普通方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 且 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{3}{2}$, 求直线 l 的倾斜角.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知 $a > 0, b > 0, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$.

(1) 证明: $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \leq 1$.

(2) 证明: $3ab + \frac{8}{a+b} \leq 5 + a^2 + b^2$.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线