成都石室中学 2022－2023 学年度上期高 2023 届一诊模拟考试
理科数学参考答案

双向细目表

题型	题号	分值	内容板块	具体知识点	考查层次		
					了解	掌握	应用
选择题	1	5	复数	复数的运算		√	
选择题	2	5	集合	集合的运算		√	
选择题	3	5	二项式	通项公式		√	
选择题	4	5	圆	圆的位置关系		√	
选择题	5	5	三角函数	二倍角,同角关系		√	
选择题	6	5	立体几何	截面		√	
选择题	7	5	函数	函数的性质与图象		√	
选择题	8	5	函数	函数的实际应用		√	
选择题	9	5	概率统计	几何概型		√	
选择题	10	5	排列组合	分类计数		√	
选择题	11	5	解析几何	双曲线		√	
选择题	12	5	导数	单调性,比较大小		√	
填空题	13	5	三角函数	两角和,二倍角		√	
填空题	14	5	导数	导数的几何意义		√	
填空题	15	5	解析几何	抛物线		√	
填空题	16	5	立体几何	球		√	
解答题	17	12	概率统计	独立性检验,随机变量分布列		√	
解答题	18	12	数列	通项公式与求和		√	
解答题	19	12	立体几何	线面关系,二面角		√	
解答题	20	12	解析几何	椭圆			√
解答题	21	12	函数与导数	单调性问题与不等式			√
解答题	22	10	选考	参数方程与极坐标		√	
解答题	23	10	选考	不等式		√	

答案及解析

1. B 【解析】因为 $z=\frac{-1}{1+2i}=\frac{-(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$,所以复数 z 的虚部为$\frac{2}{5}$. 故选 B.

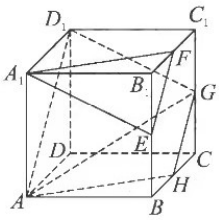
2. C 【解析】由已知,得 $A=(0,+\infty)$,$B=(-1,+\infty)$,所以 $A\cup B=(-1,+\infty)$. 故选 C.

3. C 【解析】$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$ 展开式的通项公式为 $C_5^r(x^2)^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r=C_5^r\cdot 2^r\cdot x^{10-3r}$,令 $10-3r=4$,解得 $r=2$,故含 x^4 的系数为 $C_5^2\cdot 2^2=40$. 故选 C.

4. D 【解析】由 $O(0,0)$，$A(3,0)$，动点 $P(x,y)$ 满足 $\frac{|PA|}{|PO|}=2$，得 $\frac{\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=2$，即动点 P 的轨迹为圆 $(x+1)^2+y^2=4$. 因为 $\sqrt{[2-(-1)]^2+0^2}=2+1$，所以两圆外切. 故选 D.

5. D 【解析】$\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha-1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{2\times 3-1+3^2}{3^2+1}=\frac{7}{5}$. 故选 D.

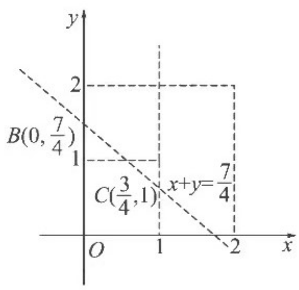
6. A 【解析】如图，取 BC 的中点 H，连接 AH，GH，AD_1，D_1G. 由题意，得 $GH /\!/ EF$，$AH /\!/ A_1F$. 又 $GH \not\subset$ 平面 A_1EF，$EF\subset$ 平面 A_1EF，所以 $GH /\!/$ 平面 A_1EF，同理 $AH /\!/$ 平面 A_1EF. 又 $GH\cap AH=H$，GH，$AH\subset$ 平面 $AHGD_1$，所以平面 $AHGD_1 /\!/$ 平面 A_1EF，故过线段 AG 且与平面 A_1EF 平行的截面为四边形 $AHGD_1$，显然四边形 $AHGD_1$ 为等腰梯形. 故选 A.



7. A 【解析】因为 $f(-x)=\frac{\ln[-x+\sqrt{(-x)^2+1}]}{e^{-x}+e^{x}}=-\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{e^{x}+e^{-x}}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，其图象关于原点对称，排除 BD；又 $x>0$ 时，$f(x)>0$，排除 C. 故选 A.

8. B 【解析】由题意，得 $(1-20\%)M_0=M_0e^{-k}$，所以 $e^{-k}=0.8$. 又因为 $(1-60\%)M_0=M_0e^{-kt}$，所以 $0.4=e^{-kt}=(e^{-k})^t=(0.8)^t$，所以 $t=\log_{0.8}0.4=\frac{\lg 0.4}{\lg 0.8}=\frac{2\lg 2-1}{3\lg 2-1}\approx\frac{-0.398}{-0.097}\approx 4(\mathrm{h})$. 故选 B.

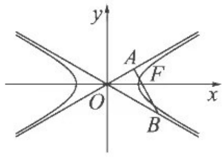
9. B 【解析】如图，设从区间 $(0,1)$，$(1,2)$ 中随机取出的数分别为 x，y，则所有结果构成区域为 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,1<y<2\}$，其面积为 $S_\Omega=1\times 1=1$. 设事件 A 表示两数之和大于 $\frac{7}{4}$，则构成的区域为 $A=\left\{(x,y)\middle| 0<x<1,1<y<2,x+y>\frac{7}{4}\right\}$，即图中的阴影部分，其面积为 $S_A=1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{23}{32}$，所以 $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{23}{32}$. 故选 B.



10. C 【解析】当 A 基地只有一班时，那么总的排法是 $C_4^2A_3^3=36$ 种；当 A 基地有一班还有另外一个班时，那么总的排法是 $C_4^1A_3^3=24$ 种. 因此，一班被安排到 A 基地的排法种数为 $36+24=60$. 故选 C.

11. C 【解析】如图，由已知可得，双曲线 C 的右焦点为 $F(c,0)$，一条渐近线为 $bx-ay=0$，则点 F 到 $bx-ay=0$ 的距离为 $\frac{bc}{c}=b$，即 $|AF|=b$. 又 $|OF|=c$，得 $|OA|=a$. 因为 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AF}$，所以 $|AB|=3b$，

$|BF|=2b$. 因为$\angle FOA=\angle FOB$,所以$\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{|AF|}{|BF|}$,即$\frac{a}{\sqrt{a^2+(3b)^2}}=\frac{b}{2b}=\frac{1}{2}$,所以$\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$,所以双曲线$C$的离心率$e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

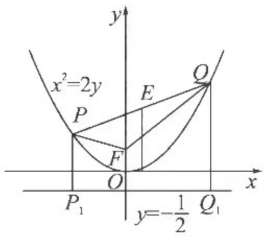


12. B 【解析】令$f(x)=e^x-1-\tan x=\frac{e^x\cos x-\cos x-\sin x}{\cos x}$,$0<x<\frac{\pi}{4}$. 令$g(x)=e^x\cos x-\cos x-\sin x$,则$g'(x)=(-\sin x+\cos x)e^x+\sin x-\cos x=(e^x-1)(\cos x-\sin x)$,所以当$0<x<\frac{\pi}{4}$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增. 又$g(0)=1-1=0$,所以$g(x)>0$. 又$\cos x>0$,所以$f(x)>0$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$恒成立,所以$f(0.2)>0$,即$e^{0.2}-1-\tan 0.2>0$,所以$a>c$. 令$h(x)=\ln(x+1)-x$,则$h'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$,所以当$0<x<\frac{\pi}{2}$时,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,所以$h(x)<h(0)=0$,即$\ln(x+1)<x$. 令$m(x)=x-\tan x$,则$m'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}$,所以当$0<x<\frac{\pi}{2}$时,$m'(x)<0$,$m(x)$单调递减,所以$m(x)<m(0)=0$,即$x<\tan x$,所以$\ln(x+1)<x<\tan x$,$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$恒成立. 令$x=0.2$,则上式变为$\ln(0.2+1)<0.2<\tan 0.2$,所以$b<0.2<c$,所以$b<c<a$. 故选 B.

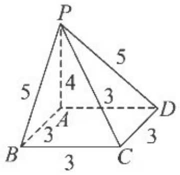
13. $\frac{1}{2}$ 【解析】因为$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2$,所以$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$,即$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$2x=\frac{\pi}{3}+4k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,所以$\cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{3}+4k\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

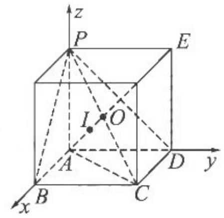
14. 1 【解析】设直线$y=kx+b$与曲线$y=e^x-1$,$y=e^{x-1}$分别相切于点$A(x_1,e^{x_1}-1)$,$B(x_2,e^{x_2-1})$. 对函数$y=e^x-1$求导得$y'=e^x$,则$k=e^{x_1}$. 对函数$y=e^{x-1}$求导得$y'=e^{x-1}$,则$k=e^{x_2-1}$. 由上可得,$e^{x_1}=e^{x_2-1}$,则$x_1=x_2-1$,得$x_1-x_2=-1$,所以$k=\frac{e^{x_1}-1-e^{x_2-1}}{x_1-x_2}=1$.

15. 5 【解析】设抛物线C的焦点为F,点P在抛物线的准线$y=-\frac{1}{2}$上的投影为P_1,点Q在直线$y=-\frac{1}{2}$上的投影为Q_1. 因为线段PQ的中点E到x轴的距离是 2,所以线段PQ的中点E到直线$y=-\frac{1}{2}$的距离是$\frac{5}{2}$,所以$|PP_1|+|QQ_1|=5$. 又$|PP_1|+|QQ_1|=|PF|+|QF|\geqslant|PQ|$,所以$|PQ|\leqslant 5$,当且仅当$P,F,Q$三点共线时等号成立,所以线段$PQ$长度的最大值为 5.



16. 4π $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 【解析】如图 1,该"阳马"为四棱锥 $P-ABCD$. 设其内切球的半径为 r. 由体积关系,得 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times5+\frac{1}{2}\times3\times5+3\times3\right)r=\frac{1}{3}\times3\times3\times4$,解得 $r=1$,故其内切球的表面积为 4π. 将该"阳马"补成一个长方体,并建立如图 2 所示的空间直角坐标系,则内切球的球心 $I(1,1,1)$,外接球的球心为 BE 中点 $O\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$,所以 $|OI|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+(2-1)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.





17. 解:(Ⅰ)依题意,补全 2×2 列联表如下:

	课间不经常进行体育活动	课间经常进行体育活动	合计
男	40	20	60
女	50	10	60
合计	90	30	120

……………………………………………………………………………… 2 分

K^2 的观测值 $k=\frac{120\times(40\times10-20\times50)^2}{60\times60\times90\times30}=\frac{40}{9}\approx4.444>3.841$, ……………………… 4 分

故有 95%的把握认为性别与课间经常进行体育活动有关联. ……………………… 6 分

(Ⅱ)由题意可得,经常进行体育活动者的频率为 $\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$,

所以在本校中随机抽取 1 人为经常进行体育活动者的概率为 $\frac{1}{4}$. ……………………… 7 分

随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,4.

由题意,得 $X\sim B\left(4,\frac{1}{4}\right)$, ……………………………………………… 8 分

所以 $P(X=k)=C_4^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(1-\frac{1}{4}\right)^{4-k}$, $k=0,1,2,3,4$,

即 $P(X=0)=C_4^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^0\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$,

$P(X=1)=C_4^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$,

$P(X=2)=C_4^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$,

$P(X=3)=C_4^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^1=\frac{3}{64}$,

$P(X=4)=C_4^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^0=\frac{1}{256}$,

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

…………………………………………………………………………………………………… 10 分

X 的数学期望为 $E(X)=np=4\times\frac{1}{4}=1$，…………………………………………………… 11 分

X 的方差为 $D(X)=np(1-p)=4\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$. ………………………………………… 12 分

18. 解：(Ⅰ)(解法一)由 $nS_{n+1}=(n+2)S_n$，得 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+2}{n}$，………………………………………… 2 分

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\cdot\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{S_2}{S_1}\cdot S_1=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot 1=\frac{n(n+1)}{2}$.

又 $S_1=a_1=1$ 也成立，所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，………………………………………………………… 6 分

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n$，又 $a_1=1$ 也成立，所以 $a_n=n$. ………………………………… 8 分

(解法二)由 $nS_{n+1}=(n+2)S_n$，得 $\frac{S_{n+1}}{n+2}=\frac{S_n}{n}$，……………………………………………………… 2 分

所以 $\frac{S_{n+1}}{(n+2)(n+1)}=\frac{S_n}{(n+1)n}$，

故 $\left\{\frac{S_n}{(n+1)n}\right\}$ 为常数列，即 $\frac{S_n}{(n+1)n}=\frac{S_1}{2\times 1}=\frac{1}{2}$，

所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，……………………………………………………………………………… 6 分

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n$，又 $a_1=1$ 也成立，所以 $a_n=n$. ………………………………… 8 分

(解法三)由 $nS_{n+1}=(n+2)S_n$，得 $na_{n+1}=2S_n$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$(n-1)a_n=2S_{n-1}$，

两式相减可得 $na_{n+1}=(n+1)a_n$，

所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}(n\geqslant 2)$. ………………………………………………………………………… 6 分

因为 $nS_{n+1}=(n+2)S_n$，当 $n=1$ 时，$S_2=3S_1$，即 $a_1+a_2=3a_1$，所以 $a_2=2$，

所以 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_2}{2}=1$，即当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=n$，

又当 $n=1$ 时也成立，所以 $a_n=n$. ………………………………………………………………… 8 分

(Ⅱ)因为 $b_n=(-1)^n\frac{4n}{4n^2-1}=(-1)^n\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以 $T_n=-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n-1}+(-1)^n\frac{1}{2n+1}=-1+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$. …

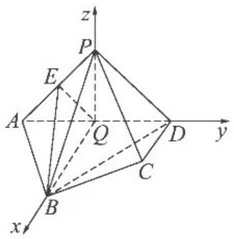
……………………………………………………………………………………………… 12 分

19. (Ⅰ)证明：如图，取 AD 的中点 Q，连接 PQ,BQ,EQ.

因为 E 是棱 PA 的中点，

所以 $EQ\parallel PD$.

又因为 $EQ\not\subset$平面 PCD，$PD\subset$平面 PCD，
所以 $EQ\parallel$平面 PCD.
又因为 $BE\parallel$平面 PCD，$BE\cap EQ=E$，
所以平面 $BEQ\parallel$平面 PCD. ………………………………………………………… 2分
又因为平面 $BEQ\cap$平面 $ABCD=BQ$，平面 $PCD\cap$平面 $ABCD=CD$，
所以 $BQ\parallel CD$.
由已知可求得 $BQ=2$，$PQ=1$，
所以 $BQ^2+PQ^2=BP^2$，故 $PQ\perp BQ$.
因为 $AB=BD$，Q是 AD 的中点，
所以 $BQ\perp AD$.
又因为 $PQ\cap AD=Q$，所以 $BQ\perp$平面 ADP. …………………………………………… 4分
又因为 $BQ\parallel CD$，所以 $CD\perp$平面 PAD. ………………………………………………… 6分



(Ⅱ)解：因为 Q 是 AD 的中点，$PA=PD=\sqrt{2}$，所以 $PQ\perp AD$.
建立如图所示的空间直角坐标系，
则 $Q(0,0,0)$，$A(0,-1,0)$，$P(0,0,1)$，$B(2,0,0)$，$C(1,1,0)$，
所以$\overrightarrow{PC}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PB}=(2,0,-1)$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,1)$.
设平面 APB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}2x-z=0,\\ y+z=0.\end{cases}$取 $x=-1$，则 $\boldsymbol{n}=(-1,2,-2)$. ……………………………… 8分
设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，
则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}2x_1-z_1=0,\\ x_1+y_1-z_1=0.\end{cases}$取 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,1,2)$. …………………………… 10分
设平面 APB 和平面 PBC 所成角为 θ，
所以 $\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-1+2-4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，
所以二面角 $A-PB-C$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. ………………………………………………………… 12分

20. (Ⅰ)解：由题意，得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ ab=2,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ………………………………………………………………… 2分
解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)证明:由(Ⅰ)可得,$A_1(-2,0)$,$A_2(2,0)$,$B(0,1)$,

所以设直线 A_2M 的方程为 $y=k(x-2)\left(k\neq0 \text{ 且 } k\neq\pm\frac{1}{2}\right)$,

直线 A_1B 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$,

直线 A_2B 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+1$.

由 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ y=\frac{1}{2}x+1, \end{cases}$ 得 $P\left(\frac{4k+2}{2k-1},\frac{4k}{2k-1}\right)$. …………………………………………… 5 分

由 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1. \end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-16k^2x+16k^2-4=0$,则 $2x_M=\frac{16k^2-4}{4k^2+1}$,

所以 $x_M=\frac{8k^2-2}{4k^2+1}$,$y_M=\frac{-4k}{4k^2+1}$,即 $M\left(\frac{8k^2-2}{4k^2+1},\frac{-4k}{4k^2+1}\right)$, ……………………………… 6 分

所以 $k_{A_1M}=\frac{\frac{-4k}{4k^2+1}}{\frac{8k^2-2}{4k^2+1}+2}=-\frac{1}{4k}$, ………………………………………………………… 7 分

所以直线 A_1M 的方程为 $y=-\frac{1}{4k}(x+2)$.

由 $\begin{cases} y=-\frac{1}{4k}(x+2), \\ y=-\frac{1}{2}x+1, \end{cases}$ 得 $Q\left(\frac{4k+2}{2k-1},\frac{-2}{2k-1}\right)$, …………………………………… 8 分

于是 $x_P=x_Q$,所以 $PQ\perp x$ 轴.

设 PQ 的中点为 N,则点 N 的纵坐标为 $\frac{\frac{4k}{2k-1}+\frac{-2}{2k-1}}{2}=1$,

故 PQ 的中点在定直线 $y=1$ 上. …………………………………………………………… 10 分

因为点 B 在 PQ 的垂直平分线上,所以 $|BP|=|BQ|$,

所以 $\triangle BPQ$ 为等腰三角形. …………………………………………………………… 12 分

21. (Ⅰ)解:由 $f(x)=(x-p)e^x$,得 $f'(x)=(x+1-p)e^x$.

设 $f(x)$ 的极值点为 x_0,

则 $\begin{cases} (x_0+1-p)e^{x_0}=0, \\ (x_0-p)e^{x_0}=-1, \end{cases}$ …………………………………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases} x_0=0, \\ p=1. \end{cases}$

经检验,$p=1$ 满足题意, …………………………………………………………… 3 分

所以 $f(x)=(x-1)e^x$,$f'(x)=xe^x$.

当 $x<0$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty,0)$,单调增区间为 $(0,+\infty)$. ……………………………… 5 分

(Ⅱ)证明:不妨设 $a<b$.

因为 $f(a)=f(b)=(a-1)e^a<0$,

所以由(Ⅰ)知,$a<0<b<1$,$f(x)\geqslant f(0)=-1$. ······ 6分

设函数 $g(x)=e^x-1+\ln(1-x)$,$x<1$,

则 $g'(x)=e^x-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-[(x-1)e^x+1]}{1-x}\leqslant 0(x<1)$,当且仅当 $x=0$ 时取等号,

所以 $g(x)$在$(-\infty,1)$上单调递减,

所以 $g(a)>g(0)=0$,即 $\ln(1-a)-1>-e^a$,

所以$[\ln(1-a)-1]\cdot e^{\ln(1-a)}>(a-1)e^a$,即 $f(\ln(1-a))>f(a)=f(b)$.

又 $\ln(1-a)>0$,$b>0$,所以 $\ln(1-a)>b$,即 $e^b<1-a$. ······ 10分

由 $f(a)=f(b)$,得$\dfrac{e^a}{1-b}=\dfrac{e^b}{1-a}<1$.

又 $b<1$,所以 $e^a<1-b$,

所以 $e^a+e^b<2-a-b$,即 $a+b+e^a+e^b<2$. ······ 12分

22. 解:(Ⅰ)由曲线 C 的参数方程,得 $x^2-y^2=\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2-\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$,

所以曲线 C 的普通方程为 $x^2-y^2=1$. ······ 5分

(Ⅱ)以坐标原点 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

设 $Q(\rho,\theta)$,则 $P\left(\rho,\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$, ······ 6分

所以点 P 的直角坐标为$\left(\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right),\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$. ······ 7分

因为 P 为曲线 C 上一点,

所以$\left[\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2-\left[\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^2=1$,

所以 $2\rho^2\cos\theta\sin\theta=1$,

所以 $\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta=\dfrac{1}{2}$, ······ 9分

所以点 Q 的轨迹方程为 $xy=\dfrac{1}{2}$. ······ 10分

23. (Ⅰ)解:由已知,得$\dfrac{1+2^x-2\times4^x}{3}>0$, ······ 1分

即 $2\times4^x-2^x-1<0$,

所以$(2^x-1)(2^{x+1}+1)<0$, ······ 4分

所以 $2^x<1$,得 $x<0$,

所以函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)$. ······ 5分

(Ⅱ)证明:由柯西不等式,得 $3(1+2^{2x}+4^{2x}a^2)\geqslant(1+2^x+4^xa)^2$. ······ 8分

由 $0<a<1$,得 $a>a^2$,所以 $3(1+2^{2x}+4^{2x}a)>(1+2^x+4^xa)^2$, ······ 9分

所以$\dfrac{1+2^{2x}+4^{2x}a}{3}>\left(\dfrac{1+2^x+4^xa}{3}\right)^2$,

所以 $\lg\dfrac{1+2^{2x}+4^{2x}a}{3}>2\lg\dfrac{1+2^x+4^xa}{3}$,即 $f(2x)>2f(x)$. ······ 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。