2023年皖东智校协作联盟高三10月联考

数学试题

试卷满分:150 分　　　　考试用时:120 分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$,则 $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2\,023}$ 等于

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 已知集合 $A=\{x|1\leqslant x<5\}$,$B=\{x|-a<x\leqslant a+4\}$,若 $B\subseteq(A\cap B)$,则 a 的取值范围为

A. $\{x|-2<x<-1\}$　　B. $\{x|x\leqslant -2\}$

C. $\{x|x\leqslant -1\}$　　D. $\{x|x>-2\}$

3. 已知 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个互相垂直的单位向量,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}(\lambda\in\mathbf{R})$,则 $\lambda=\sqrt{3}$ 是 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,都有 $\frac{S_n}{n}>\frac{S_{n+1}}{n+1}$,若 $\frac{a_{18}}{a_{17}}<-1$,则

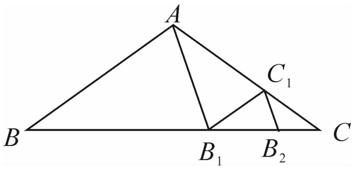
A. S_n 的最小值是 S_{17}　　B. S_n 的最小值是 S_{18}

C. S_n 的最大值是 S_{17}　　D. S_n 的最大值是 S_{18}

5. 锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $c^2=a(a+b)$,则 $\frac{\sin^2 A}{\sin(C-A)}$ 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. 0.618 是无理数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似值,被称为黄金比值. 我们把腰与底的长度比为黄金比值的等腰三角形称为黄金三角形. 如图,$\triangle ABC$ 是顶角为 A,底 $BC=2$ 的第一个黄金三角形,$\triangle B_1CA$



是顶角为 B_1 的第二个黄金三角形，$\triangle C_1B_1C$ 是顶角为 C_1 的第三个黄金三角形，$\triangle B_2CC_1$ 是顶角为 B_2 的第四个黄金三角形…，那么依次类推，第 2 023 个黄金三角形的周长大约为

A. $2.236\times0.618^{2\,021}$ B. $2.236\times0.618^{2\,022}$

C. $4.472\times0.618^{2\,021}$ D. $4.472\times0.618^{2\,022}$

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$是偶函数，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=\begin{cases}2\sin\frac{\pi}{2}x, 0\leqslant x\leqslant1,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^x+\frac{3}{2}, x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2+2af(x)+b=0(a,b\in\mathbf{R})$有且仅有 6 个不同实数根，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(-2,-\frac{3}{4}\right)$ B. $\left(-2,-\frac{7}{4}\right)$

C. $\left(-2,-\frac{7}{4}\right)\cup\left(-\frac{7}{4},-\frac{3}{4}\right)$ D. $\left(-2,-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{7}\right)$

8. 法国数学家加斯帕·蒙日被称为“画法几何创始人”“微分几何之父”. 他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆，这个圆称为该椭圆的蒙日圆. 若椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的蒙日圆为 $C:x^2+y^2=\frac{4}{3}a^2$，过 C 上的动点 M 作 Γ 的两条切线，分别与 C 交于 P,Q 两点，直线 PQ 交 Γ 于 A,B 两点，则下列结论不正确的是

A. 椭圆 Γ 的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

B. $\triangle MPQ$ 面积的最大值为$\frac{2}{3}a^2$

C. M 到 Γ 的左焦点的距离的最小值为$\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{6})a}{3}$

D. 若动点 D 在 Γ 上，将直线 DA,DB 的斜率分别记为 k_1,k_2，则 $k_1k_2=-\frac{1}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 某学校共有学生 2 000 人，其中高一 800 人，高二高三各 600 人，学校为了了解学生在寒假期间每天的读书时间，按照分层随机抽样的方法从全校学生中抽取 100 人，其中高一学生，高二学生，高三学生每天读书时间的平均数分别为$\overline{x_1}=2.7$，$\overline{x_2}=3.1$，$\overline{x_3}=3.3$，每天读书时间的方差分别为 $s_1^2=1$，$s_2^2=2$，$s_3^2=3$，则下列正确的是

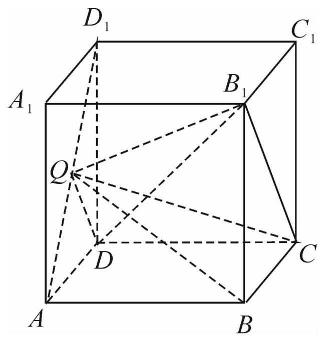
A. 从高二年级抽取 30 人

B. 被抽取的学生中，高二年级每天的总读书时间比高一年级多 15 小时

C. 被抽取的学生每天的读书时间的平均数为 3 小时

D. 估计全体学生每天的读书时间的方差为 $s^2=1.966$

10. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 Q 为线段 AD_1（包含端点）上一动点，则下列选项正确的是



A. 三棱锥 $C_1\text{-}BDQ$ 的体积为定值

B. 在 Q 点运动过程中，存在某个位置使得 $AD_1\perp$平面 BQC

C. 截面三角形 BQC 面积的最大值为 $2\sqrt{2}$

D. 当三棱锥 $B\text{-}B_1CQ$ 为正三棱锥时，其内切球半径为 $6-\sqrt{3}$

11. 乒乓球，被称为中国的“国球”，是一种世界流行的球类体育项目，是推动外交的体育项目，被誉为“小球推动大球”. 某次乒乓球比赛采用五局三胜制，当参赛甲，乙两位中有一位赢得三局比赛时，就由该选手晋级而比赛结束. 每局比赛皆须分出胜负，且每局比赛的胜负不受之前比赛结果影响. 假设甲在任一局赢球的概率为 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$，实际比赛局数的期望值记为 $f(p)$，下列说法正确的是

A. 三局就结束比赛的概率为 p^3

B. $f(p)$的常数项为 3

C. $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{33}{8}$

D. $f\left(\frac{1}{4}\right)>f\left(\frac{5}{6}\right)$

12. 已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^x}$和 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+b$ 有相同的极大值，若存在 $x_1\in\mathbf{R}$，$x_2\in(0,+\infty)$使得 $f(x_1)=g(x_2)=k$ 成立，则

A. $b=0$

B. $k\in\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$

C. 当 $k<0$ 时，$x_1+x_2<1$

D. 若 $f(x)=k$ 的根记为 x_1，x_2，$g(x)=k$ 的根记为 x_3，x_4，且 $x_1<x_2<x_3<x_4$，则 $e^{x_1+x_2}=x_3\cdot x_4$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(x+2y-z)^8$ 展开式中，$x^3y^2z^3$ 项的系数为________.

14. 甲和乙两个箱子中各装有 10 个球，其中甲箱中有 5 个白球，5 个红球，乙箱中有 8 个红球，2 个白球. 掷一枚质地均匀的骰子，如果点数为 5 或 6，从甲箱子随机摸出 1 个球；如果点数为 1，2，3，4，从乙箱子中随机摸出 1 个球. 则在摸到红球的条件下，红球来自甲箱子的概率为________.

15. 若正四面体 $P\text{-}ABC$ 的侧面 PAB 所在平面内有一动点 Q，已知 Q 到底面 ABC 的距离与 Q 到点 P 的距离之比为正常数 k，且动点 Q 的轨迹是抛物线，则 k 的值为________.

16. 已知函数 $f(\alpha)=2\sqrt{\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\sin^2\alpha}-\sqrt{\cos^2\alpha+\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2}$，函数 $g(\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha+\sin 2\alpha+m$，若 $\forall\alpha$，$\exists\beta$ 使 $f(\alpha)\leqslant g(\beta)$成立，则实数 m 的取值范围为________.

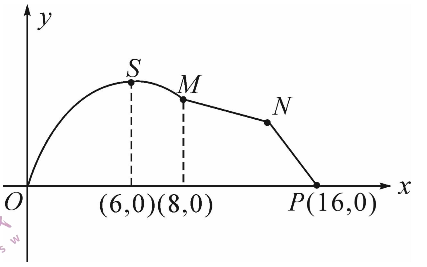
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

某市拟在长为 16 km 的道路 OP 的一侧修建一条供市民游玩的绿道，绿道的前一部分为曲线 OSM，该曲线段为函数 $y=A\sin\omega x(A>0,\ \omega>0,x\in[0,8])$ 的图像，且图像的最高点为 $S(6,4\sqrt{3})$，绿道的后一段为折线段 MNP，且 $\angle MNP=120°$（如图所示）.

(1)求实数 A 和 ω 的值以及 M、P 两点之间的距离；

(2)求$\triangle MNP$ 面积的最大值.

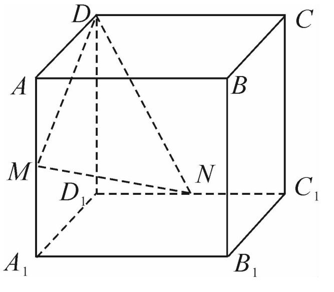


18.（本小题满分 12 分）

如图，在棱长为 a 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是 AA_1，C_1D_1 中点，过 D，M，N 三点的平面与正方体的下底面$A_1B_1C_1D_1$相交于直线 l.

(1)画出直线 l 的位置，并说明作图依据；

(2)正方体被平面 DMN 截成两部分，求较小部分几何体的体积.



19.(本小题满分 12 分)

教育储蓄是指个人按国家有关规定在指定银行开户、存入规定数额资金、用于教育目的的专项储蓄,是一种专门为学生支付非义务教育所需教育金的专项储蓄,储蓄存款享受免征利息税的政策.若你的父母在你 12 岁生日当天向你的银行教育储蓄账户存入2 000元,并且每年在你生日当天存入 2 000 元,连续存 6 年,在你十八岁生日当天一次性取出,假设教育储蓄存款的年利率为 10%.

(1)在你十八岁生日当天时,一次性取出的金额总数为多少?(参考数据:$1.1^7\approx1.95$)

(2)高考毕业,为了增加自己的教育储蓄,你利用暑假到一家商场勤工俭学,该商场向你提供了三种付酬方案:

第一种,每天支付 38 元;

第二种,第 1 天付 4 元,从第 2 天起,每一天比前一天都多付 4 元;

第三种,第 1 天付 0.4 元,以后每一天比前一天翻一番(即增加 1 倍).

你会选择哪种方式领取报酬?

20.(本小题满分 12 分)

统计学是通过收集数据和分析数据来认识未知现象的一门科学. 面对一个统计问题,首先要根据实际需求,通过适当的方法获取数据,并选择适当的统计图表对数据进行整理和描述,在此基础上用各种统计方法对数据进行分析,从样本数据中提取需要的信息,推断总体的情况,进而解决相应的实际问题.

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支. 概率是对随机事件发生可能性大小的度量,它已渗透到我们的日常生活中,成为一个常用词汇.

同学们在学完高中统计和概率相关章节后,探讨了以下两个问题,请帮他们解决:

(1)从两名男生(记为 B_1 和 B_2)、两名女生(记为 G_1 和 G_2)中任意抽取两人,分别写出有放回简单随机抽样、不放回简单随机抽样和按性别等比例分层抽样的样本空间,并分别计算在三种抽样方式下抽到的两人都是男生的概率,结合计算结果分析三种抽样;

(2)一个袋子中有 100 个除颜色外完全相同的球，其中有 40 个黄球、60 个白球，从中随机地摸出 20 个球作为样本. 用 X 表示样本中黄球的个数，分别就有放回摸球和不放回摸球，求 X 的分布列和数学期望. 结合计算结果分析两种摸球方式的特点.

21.(本小题满分 12 分)

平面直角坐标系 xOy 中，P 为动点，PA 与直线 $x=\sqrt{3}y$ 垂直，垂足 A 位于第一象限，PB 与直线 $x=-\sqrt{3}y$ 垂直，垂足 B 位于第四象限，$\angle APB>90^\circ$ 且 $|AP||BP|=\frac{3}{4}$，记动点 P 的轨迹为 C.

(1)求 C 的方程；

(2)已知点 $M(-2,0)$，$N(2,0)$，设点 T 与点 P 关于原点 O 对称，$\angle MTN$ 的角平分线为直线 l，过点 P 作 l 的垂线，垂足为 H，交 C 于另一点 Q，求 $\frac{|PH|}{|QH|}$ 的最大值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x$，设 $A(x_1,f(x_1))$，$B(x_2,f(x_2))$，且 $x_1\neq x_2$.

(1)证明：$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$；

(2)当 $x>0$ 时，证明：$e^x-e\frac{x\sin x}{2}>x$.