2023年汕头市普通高考第二次模拟考试试题参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8
B	D	C	A	C	A	C	B

二、多选题

9	10	11	12
ABD	ABD	ACD	BD

三、填空题

13. $x^2+y^2-2x+y=0$ 或 $(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$，两个答案均可得分

14. 2　　15. 0.4262　　16. 4

四、解答题

17.（1）由题意，$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2\right)}}=\dfrac{115.10-9\cdot2.57\cdot6.20}{29.46}=\dfrac{-28.306}{29.46}\approx-0.96$

$\because r=-0.96<0, \therefore |r|=0.96>0.75$，$\therefore$ 行驶里程与轮胎凹槽深度成负相关，且相关性较强。

（2）由图像可知，车胎凹槽深度与对数回归预报值残差、偏离更小，拟合度更高，线性回归预报值偏差较大。

由题（1）得线性回归模型 $\hat{y}=9.158-1.149x$ 的相关系数 $r=-0.96$，决定系数 $R_2^2=r^2=(0.96)^2\approx0.922$

由题意，对数回归模型 $\hat{y}=10.11-3.75\ln(x+1)$ 的决定系数 $R^2=0.998$，$\because 0.998>0.922$，$\therefore$ 对数回归模型的拟合度更高。

18.（1）$\because f(x)=\dfrac{\tan x\cdot\tan 2x}{\tan 2x-\tan x}+\sqrt{3}\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)$，$\therefore$定义域为

$$\begin{cases}\text{分母不为0，有}\tan 2x-\tan x\neq 0\text{，解得}x\in R\\ \text{对于}\tan x\text{，有}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \text{对于}\tan 2x\text{，有}2x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\text{，即}x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\end{cases}$$，综上，解得$x\neq\dfrac{k\pi}{4}$

（2）$f(x)=\dfrac{\tan x\cdot\tan 2x}{\tan 2x-\tan x}+\sqrt{3}\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)$

$=\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}-\sqrt{3}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

上下同时乘以$\cos x\cdot\cos 2x$，原式

$=\dfrac{\sin x\cdot\sin 2x}{\cos x\sin 2x-\sin x\cos 2x}-\sqrt{3}\cos 2x$

$=\dfrac{\sin x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{\cos x\cdot 2\sin x\cdot\cos x-\sin x\cos 2x}-\sqrt{3}\cos 2x$

上下同时$\div\sin x$，原式

$=\dfrac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos x\cdot 2\cos x-\cos 2x}-\sqrt{3}\cos 2x$

$=\dfrac{\sin 2x\cdot\cos 2x}{2\cos^2 x-\cos 2x}-\sqrt{3}\cos 2x$

$=\dfrac{\sin 2x}{2\cos^2 x-(2\cos^2 x-1)}-\sqrt{3}\cos 2x$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\cos 2x\right)$

$=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$

$=2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\sin 2x-\sin\dfrac{\pi}{3}\cos 2x\right)$

$=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\left(x\neq\dfrac{k\pi}{4}，k\in Z\right)$

$\because x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore$设$t=2x-\dfrac{\pi}{3}$，则$t\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)$

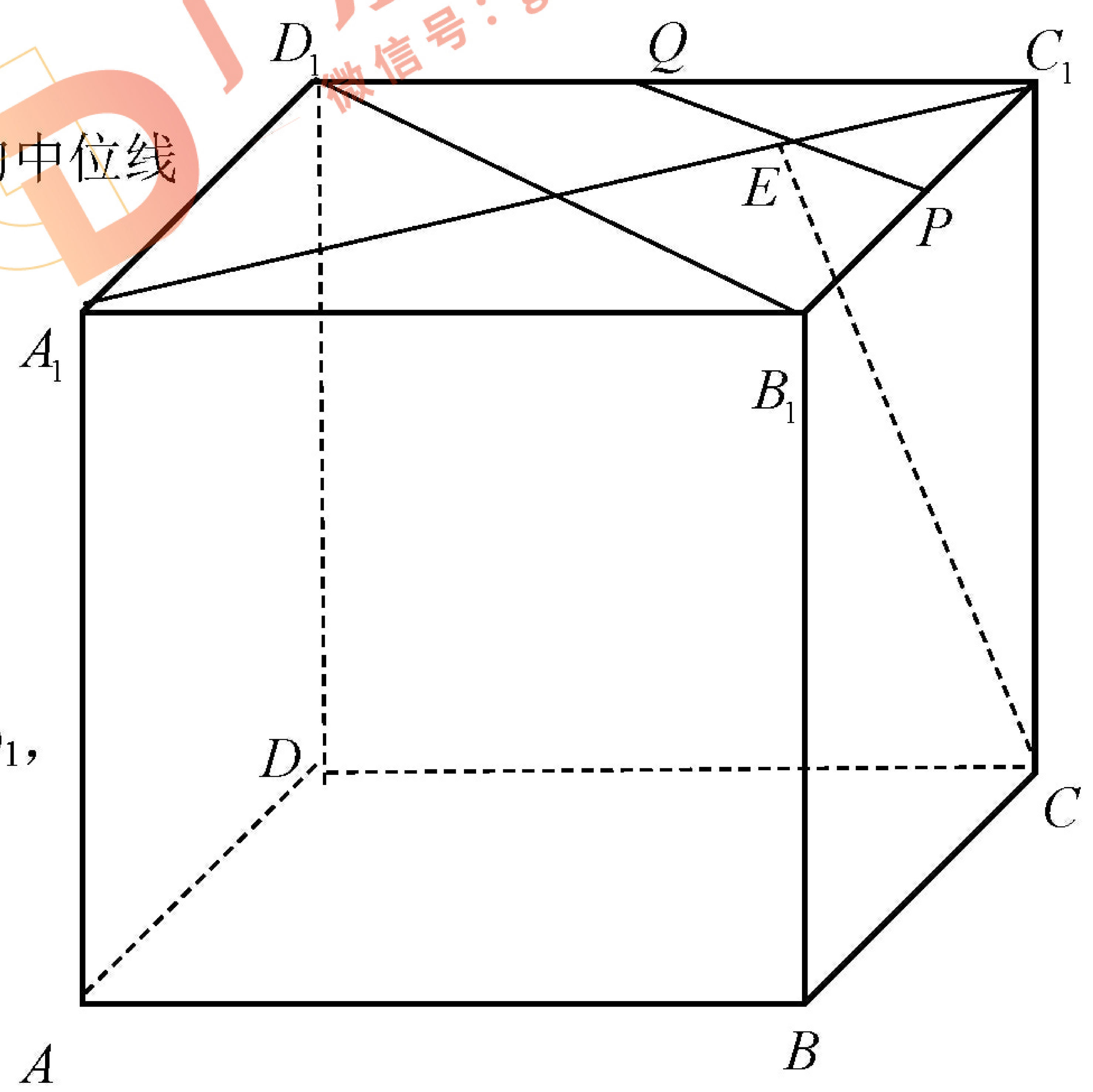
由三角函数图像的性质可得$f(t)=\sin t$在$t\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$单调递增，在$t\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right)$单调递减；

由$2x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$，解得$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{12}\right)$，由$2x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，解得$x\in\left(\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right)$；即

$f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{12}\right)$，单调递减区间为$\left(\dfrac{5\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right)$

19.（1）由题意，P、Q 分别为B_1C_1和C_1D_1的中点时，有$l\perp CE$，证明过程如下：

连接B_1D_1，取B_1C_1和C_1D_1中点分别为P、Q，连接PQ，$\because A_1E=3EC_1$，$\therefore PQ$一定过经过点E，$\therefore PQ$即为所求作的l。



$\because P$、Q 分别为B_1C_1和C_1D_1的中点，$\therefore P$、Q 为$\triangle B_1C_1D_1$的中位线

$\therefore PQ\,//\,B_1D_1$，且 PQ 过经过点 E

$\because$正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形

$\therefore B_1D_1\perp A_1C_1$，$\because PQ\,//\,B_1D_1\ \therefore PQ\perp A_1C_1$

又$\because$正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的侧棱CC_1垂直底面 $A_1B_1C_1D_1$，

$PQ\subset A_1B_1C_1D_1$ $\therefore PQ\perp CC_1$

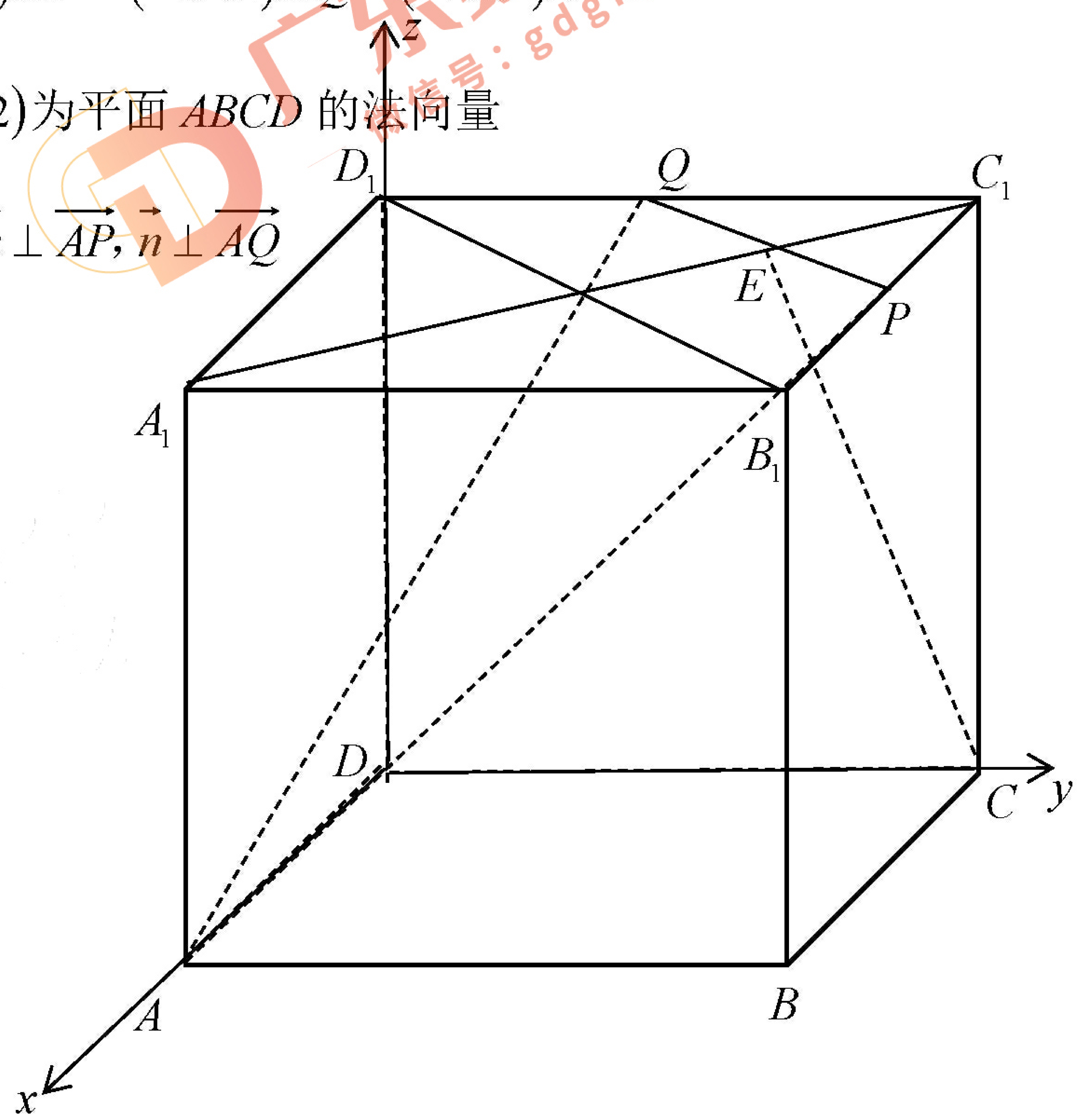
又$\because A_1C_1$，$CC_1\subset$平面A_1C_1CA，$A_1C_1\cap CC_1=C_1$

$\therefore PQ\perp$平面A_1C_1CA $\because CE\subset$平面A_1C_1CA，$\therefore PQ\perp CE$，即$l\perp CE$

（2）①连接AP，AQ，$\because$正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，有 AD，DC，DD_1 两两垂直，建立以 D 点为坐标原点，以向量的方向分别为 xyz 轴的正方向，建立空间直角坐标系，如图所示，设正方体边长为 2，

则有$D(0,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$A(2,0,0)$，$P(1,2,2)$，$Q(0,1,2)$，$\overrightarrow{AP}=(-1,2,2)$，$\overrightarrow{AQ}=(-2,1,2)$，，

$\because$正方体的侧棱DD_1垂直底面 $ABCD$，$\therefore\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$为平面 $ABCD$ 的法向量



设平面α，即平面 APQ 的法向量$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，则$\vec{n}\perp\overrightarrow{AP},\vec{n}\perp\overrightarrow{AQ}$

$\therefore\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\vec{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$，即馬!蟲

$\begin{cases}-x+2y+2z=0\\-2x+y+2z=0\end{cases}$，令$x=2$，则$y=-2$，$z=3$，

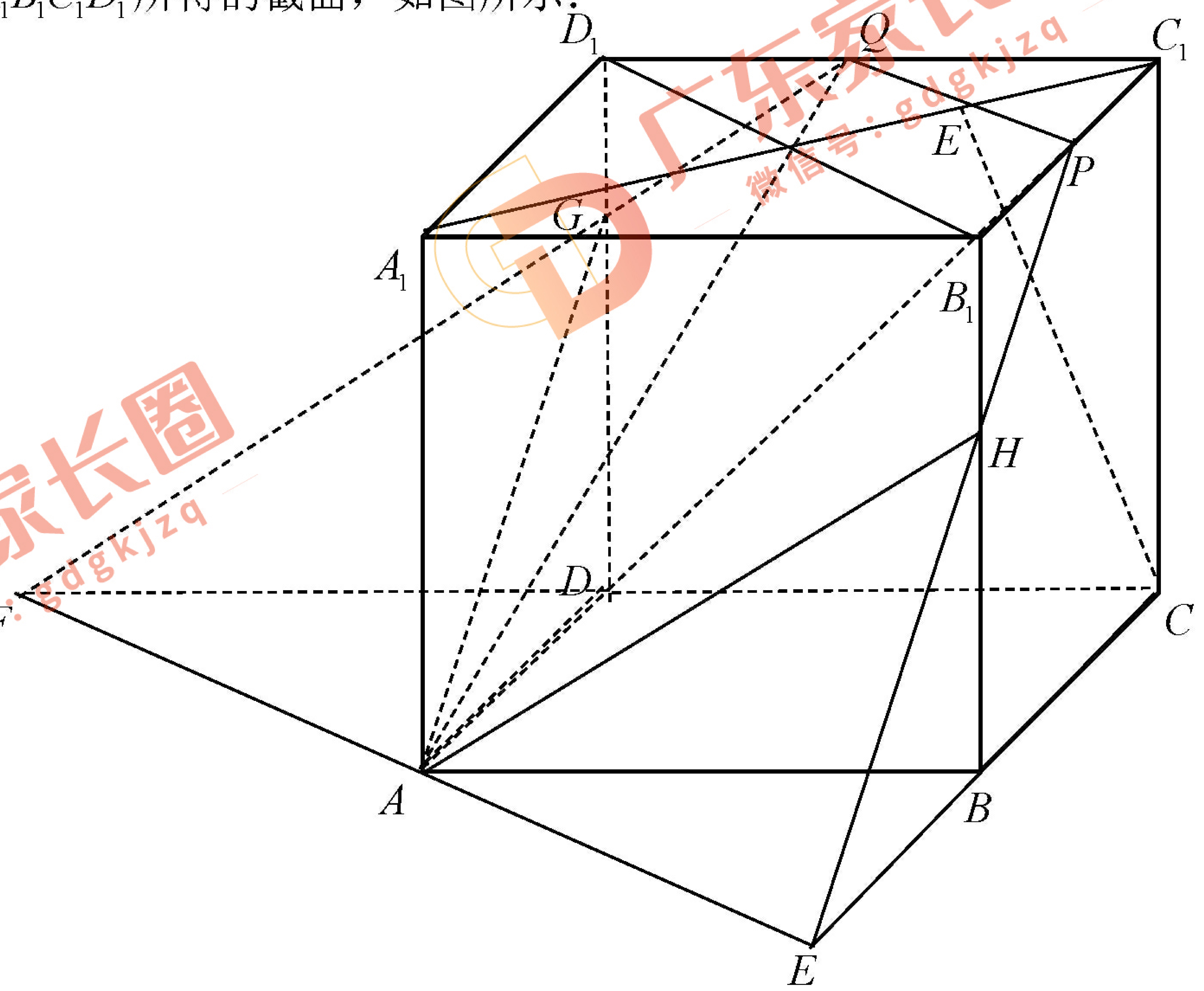
$\therefore$平面 APQ 的一个法向量$\vec{n}=(2,-2,3)$，

$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$，$|\overrightarrow{DD_1}|=2$

设平面α与平面 $ABCD$ 的夹角的平面角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{DD_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DD_1}\right|}=\frac{\left|0\cdot 2+0\cdot(-2)+2\cdot 3\right|}{2\cdot\sqrt{17}}=\frac{6}{2\cdot\sqrt{17}}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$$

②延长 BC，取 $BE=BC$，延长 CD，取 $DF=CD$，连接 EF，$PE\cap BB_1=H$，$QF\cap DD_1=G$，平面 $PQGAH$ 即为平面 α 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面，如图所示：



20.（1）∵ $b_n=a_n-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n^2-1}{a_n}$，∴

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{a_{n+1}^2-1}{a_{n+1}}}{\frac{a_n^2-1}{a_n}}=\frac{a_{n+1}^2-1}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_n}{a_n^2-1}=\frac{a_n\cdot\left(a_{n+1}^2-1\right)}{a_{n+1}\cdot\left(a_n^2-1\right)}=\frac{a_n\cdot a_{n+1}^2-a_n}{a_{n+1}\cdot a_n^2-a_n^2}=\frac{a_n\cdot a_{n+1}^2-a_n}{a_{n+1}\cdot\left(a_n^2-1\right)}$$

由题意，$a_na_{n+1}^2-2\left(a_n^2-1\right)a_{n+1}-a_n=0,\ n\in N^*$，∴ $a_na_{n+1}^2-a_n=2\left(a_n^2-1\right)a_{n+1}$，代入，有 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2=q$

∵ $a1=3,\therefore b_1=a_1-\frac{1}{a_1}=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$，∴数列 b_n 是以 $\frac{8}{3}$ 为首项，以 2 为公比的等比数列，∴

$$b_n=\frac{8}{3}\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot 2^3\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot 2^{n+2}$$

（2）$b_n^2=\left(a_n-\frac{1}{a_n}\right)^2=\left(a_n\right)^2+\left(\frac{1}{a_n}\right)^2-2=a_n^2+\frac{1}{a_n^2}-2=\left(\frac{1}{3}\cdot 2^{n+2}\right)^2=\frac{1}{9}\cdot 4^{n+2}$

$\because S_n=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots\ldots+a_n^2,\ T_n=\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{a_n^2}$，$\therefore$

$S_n+T_n=$

$a_1^2+\frac{1}{a_1^2}+a_2^2+\frac{1}{a_2^2}+a_3^2+\frac{1}{a_3^2}+\ldots\ldots+a_n^2+\frac{1}{a_n^2}=a_1^2+\frac{1}{a_1^2}-2+a_2^2+\frac{1}{a_2^2}-2+a_3^2+\frac{1}{a_3^2}-2+\ldots+a_n^2+\frac{1}{a_n^2}-2+2n$

$=$

$\left(\frac{1}{9}\cdot 4^3+\frac{1}{9}\cdot 4^4+\frac{1}{9}\cdot 4^5+\ldots\ldots+\frac{1}{9}\cdot 4^{n+2}\right)+2n=\frac{\frac{1}{9}\cdot 4^3-\frac{1}{9}\cdot 4^{n+2}\cdot 4}{1-4}+2n=\frac{\frac{1}{9}\cdot 4^{n+2}\cdot 4-\frac{1}{9}\cdot 4^3}{3}+2n=\frac{4^{n+3}-64}{27}+2n$

S_n+T_n为整数，则$\frac{4^{n+3}-64}{27}=k,\ k\in N^*$，$4^{n+3}-64=27k$，$4^{n+3}-4^3=27k,\ 4^3\left(4^n-1\right)=27k,$

$k=\frac{64}{27}\left(4^n-1\right)=\frac{64}{27}\left(2^n+1\right)\left(2^n-1\right)$，解得最小为$n=9$时，有$k=\frac{64}{27}\cdot 513\left(2^9-1\right)=64\cdot 19\cdot\left(2^9-1\right)$为整数解.

21.（1）由双曲线定义，知$|PF_1|-|PF_2|=7-5=2=2a,\therefore a=1$，$\because$设抛物线的方程为：$y^2=2px$，因为F2 为抛物线的焦点，$\therefore c=\frac{p}{2},\ p=2c$，$\therefore y^2=4cx$，$\because |PF_2|=5$，由抛物线定义得 P 点横坐标为$m=5-c$，代入抛物线方程，有$P\left(5-c,\sqrt{4c\cdot(5-c)}\right)$，代入双曲线方程，有$\frac{(5-c)^2}{1}-\frac{4c(5-c)}{c^2-1}=1$（$c>0$），解得 c $=2$，$\therefore b^2=c^2-a^2=2^2-1^2=3$，即双曲线方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$，抛物线方程为：$y^2=8x$.

22.(1)由题意，$g(x)=x^3-ax+\frac{1}{4},\ g'(x)=3x^2-a$

当$a\le 0$时，$g'(x)\ge 0$恒成立，$g(x)=x^3-ax+\frac{1}{4}$没有最值。

当$a>0$时，令$g'(x)=0$，即$3x^2-a=0$，$x_1=-\frac{\sqrt{3a}}{3},\ x_2=\frac{\sqrt{3a}}{3}$，

$x\in(-\infty,\ x_1),\ g'(x)>0,\ x\in(x_1,\ x_2),\ g'(x)<0,\ x\in(x_2,+\infty),\ g'(x)>0$，$g(x)$在

当$x\in(-\infty,\ x_1)$时，$g(x)$单调递增，当$x\in(x_1,\ x_2)$时，$g(x)$单调递减，当$x\in(x_2,+\infty)$，$g(x)$单调递增

∴ $x_1=\frac{\sqrt{3a}}{3}$时，$g(x)$有极大值为$g(x_1)=g\left(-\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)=\frac{2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$，

$x_2=\frac{\sqrt{3a}}{3}$时，$g(x)$有极小值为$g(x_2)=g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)=\frac{-2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$

当 $x_0=\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时，要证 $x_1+2x_0=0$，即证 $x_1=-2x_0=\frac{-2\sqrt{3a}}{3}$，

代入计算有，$g(x_0)=\frac{2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$，$g(x_1)=\frac{2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$，有 $g(x_0)=g(x_1)$ 符合题意；

即 $x_1+2x_0=0$ 得证，同理，当 $x_0=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 亦得证，如图①②所示。

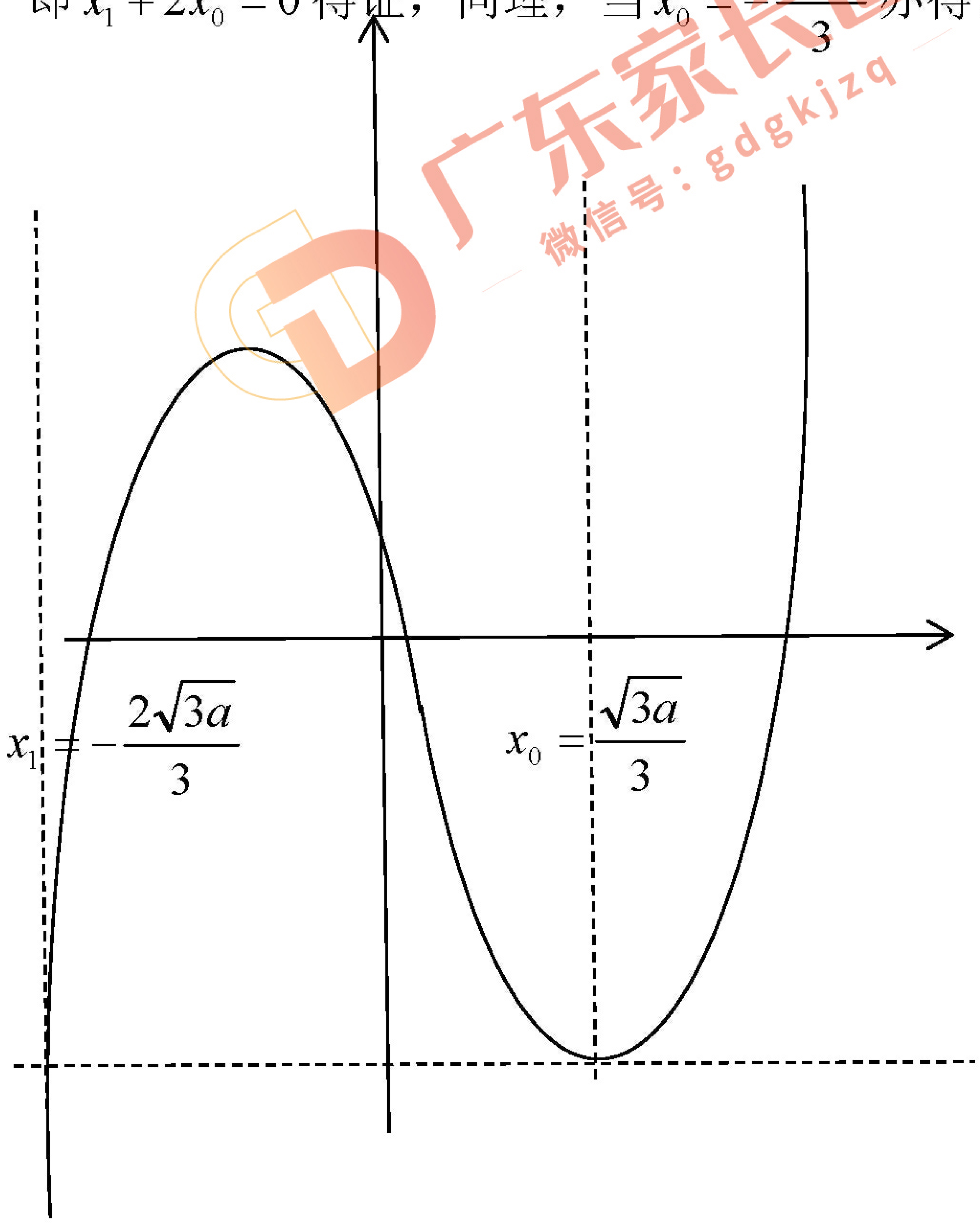


图 ①

$x_1+2x_0=0$

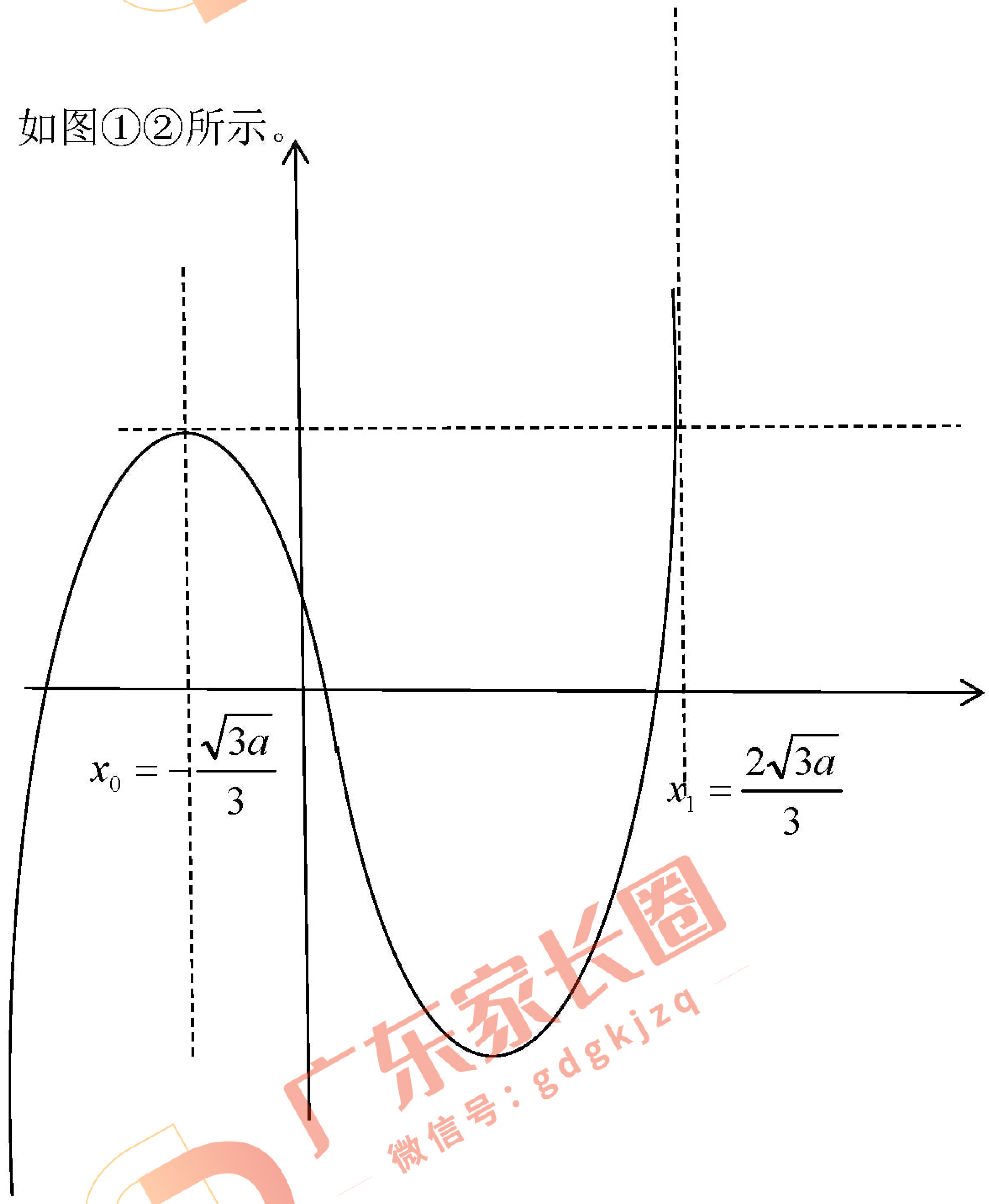


图 ②

$x_1+2x_0=0$

(2) ①当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)=-\ln x<0$，∴ $h(x)=\min(f(x),\ g(x))\le g(x)<0$，故函数 $h(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时无零点；

②当 $x=1$ 时，$f(1)=0$，$g(1)=\frac{5}{4}-a$，若 $a\le\frac{5}{4}$，则 $g(1)\ge 0$，∴ $h(x)=f(1)=0$，故 $x=1$ 是函数 $h(x)$ 的一个零点；若 $a>\frac{5}{4}$，则 $g(1)<0$，∴ $h(x)=g(x)<0$，故 $x=1$ 时函数 $h(x)$ 无零点；

③当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=-\ln x>0$，因此只需要考虑 $g(x)$

由题意，$g(x)=x^3-ax+\frac{1}{4}$，$g'(x)=3x^2-a$

(i)当 $a\le 0$ 时，$g'(x)\ge 0$ 恒成立，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$g(0)=\frac{1}{4}>0$，$\therefore g(x)>0$ 在 $x\in(0,1)$ 恒成立，即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点，也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点；

(ii)当 $a\ge 3$ 时，$x\in(0,1)$，$g'(x)<0$ 恒成立，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$a\ge 3$，$g(1)=\frac{5}{4}-a<0$ 即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 内有 1 个零点，也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内有 1 个零点；

(iii) $a\in(0,3)$ 时，函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$ 上单调递减，$\therefore g(x)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)=\frac{-2a\sqrt{3a}}{9}+\frac{1}{4}$，

若 $g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)>0$，即 $0<a<\frac{3}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点，也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内无零点；

若 $g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)=0$，即 $a=\frac{3}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的一个零点，也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的一个零点；

若 $g\left(\frac{\sqrt{3a}}{3}\right)<0$，即 $\frac{3}{4}<a<3$ 时，由 $g(0)=\frac{1}{4}>0$，$g(1)=\frac{5}{4}-a$，$\therefore$ 当 $\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点，也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内有两个零点，当 $\frac{5}{4}\le a<3$ 时，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的一个零点，也即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内有唯一的一个零点。

综上所述，当 $\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$ 时，函数 $h(x)$ 会有 3 个零点。