2022学年第二学期浙江强基联盟高三2月统测

数学试题参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	D	C	B	B	A

1.B　$A=(-\infty,2]$，$B=(0,4]$，$\therefore A\cap B=(0,2]$，选 B.

2.C　$|(1+\mathrm{i})\bar{z}|=|-2\mathrm{i}|$，$\therefore |(1+\mathrm{i})|\cdot|\bar{z}|=2$，即 $|\bar{z}|=\sqrt{2}$，$\therefore$ 选 C.

3.A　由 $a>|b|$ 可知 $a>0$，所以 $a^2>b^2$. $a^2>b^2\Rightarrow|a|>|b|$，当 $a<0$ 时，$a>|b|$ 不成立. 所以选 A.

4.D　设事件 A 表示甲在规定的时间内到达，B 表示乙在规定的时间内到达，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.9$，A,B 相互独立，$\therefore P(X=0)=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=0.05$，$P(X=1)=P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})=0.5$，$P(X=2)=P(AB)=0.45$，$\therefore E(X)=0\times0.05+1\times0.5+2\times0.45=1.4$，$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=0.34$. $\therefore$ 选 D.

5.C　$P(1,m)\Rightarrow l:\dfrac{x}{a^2}+my=1\Rightarrow k_l=-\dfrac{1}{a^2y}\Rightarrow k_{PM}=a^2m\Rightarrow PM:y-m=a^2m(x-1)$，令 $y=0$，得 $x=1-\dfrac{1}{a^2}=e^2\Rightarrow$ $M(e^2,0)$，$\therefore c=2e^2\Rightarrow c=1$，$a=\sqrt{2}\Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore$ 选 C.

6.B　设 $AC=x$，$BC=y$，$B_1-A_1C_1B$ 的外接球半径为 r，则 $V_{B_1-A_1C_1B}=\dfrac{4\pi}{3}r^3=\dfrac{8\sqrt{2}\pi}{3}$，$\therefore r=\sqrt{2}$.

$\because x^2+y^2+4=(2r)^2=8$，$\therefore x^2+y^2=4$.

又 $V_{B-ACC_1A_1}=\dfrac{1}{3}\times S_{B-ACC_1A_1}\times BC=\dfrac{1}{3}\times2\times xy\leqslant\dfrac{1}{3}(x^2+y^2)=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为 $\dfrac{4}{3}$，选 B.

7.B　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}}{2}=\dfrac{1-x}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{x}{2}\overrightarrow{AC}$，

则 $|\overrightarrow{PQ}|^2=\dfrac{(1-x)^2}{4}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{x^2}{4}\overrightarrow{AC}^2+\dfrac{x(1-x)}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{7}{4}x^2-3x+\dfrac{9}{4}$，

当 $x=\dfrac{6}{7}$ 时，$|\overrightarrow{PQ}|^2_{\min}=\dfrac{27}{28}$，$|\overrightarrow{PQ}|_{\min}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$，选 B.

8.A　$\ln a=\ln 2$，$\ln b=0.9\ln 2.1$，$\ln c=1.1\ln 1.9$，

构造函数 $f(x)=(1-x)\ln(2+x)$，$x\in[-0.1,0.1]$，则 $\ln a=f(0)$，$\ln b=f(0.1)$，$\ln c=f(-0.1)$，

$f'(x)=-\ln(2+x)+(1-x)\cdot\dfrac{1}{2+x}=-\ln(2+x)+\dfrac{3}{2+x}-1$ 在 $[-0.1,0.1]$ 上单调递减，

$f'(x)\leqslant f'(-0.1)=-\ln 1.9+\dfrac{1.1}{1.9}=\dfrac{11}{19}+\ln\dfrac{10}{19}<0$，所以 $f(x)$ 在 $[-0.1,0.1]$ 上单调递减，

所以 $f(-0.1)>f(0)>f(0.1)$，从而 $c>a>b$，选 A.

题号	9	10	11	12
答案	BCD	ACD	ABD	AC

9.BCD　男生成绩在 $[90,110)$ 内的频率为 0.3，A 错误；

男生成绩的平均数为 $40\times0.05+60\times0.15+80\times0.15+100\times0.3+120\times0.25+140\times0.1=97$，B 正确；

男生成绩的样本数据的第 75 百分位数为 $110+\dfrac{0.1}{0.0125}=118$，C 正确；

总样本的平均数为 $\dfrac{2}{3}\times97+\dfrac{1}{3}\times91=95$，D 正确.

10.ACD　对于选项 A，M 在平面 BC_1A_1 内，平面 BC_1A_1 与平面 ACD_1 间的距离为体对角线的 $\dfrac{1}{3}$，$\therefore$ 三棱锥 $M-ACD_1$ 的体积为定值，A 正确.

对于选项 B,当 M 为 BC_1 的中点时,直线 DM 与平面 BCC_1B_1 所成的角 θ 最大,此时 $\tan\theta=\frac{|CD|}{|CM|}=\sqrt{2}\neq\tan\frac{\pi}{3}$,$\theta\neq\frac{\pi}{3}$,B 错误.

$\because A_1D\perp$平面 ABC_1D_1,又 $AM\subseteq$平面 ABC_1D_1,$\therefore A_1D\perp AM$,C 正确. $\because M$ 到平面 CDD_1 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}|C_1M|$,M 到平面 ACD 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}|BM|$,$\therefore M$ 到两个平面的距离之和为 $\frac{\sqrt{2}}{2}|C_1M|+\frac{\sqrt{2}}{2}|BM|=\frac{\sqrt{2}}{2}|BC_1|$,是定值. D 正确.

11. ABD　$\because AB=\frac{2p}{\sin^2\theta}=8p=16$,$\therefore p=2$. 当 AB 垂直于 x 轴时,$\angle AMB$ 为直角,A 正确.

$\because A_1F\perp B_1F$ 由等面积法可知 $|FA_1||FB_1|=|MF||A_1B_1|$ 成立,$\therefore$B 正确.

$||QE|-|QF||\leqslant\sqrt{5}$,最大值为 $\sqrt{5}$,C 不正确.

$\because \frac{1}{AF}+\frac{1}{PF}=\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{2}+\frac{2-2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2}$,

令 $x=\cos\frac{\theta}{2}$,则 $x\in(0,1)$,$\frac{1}{AF}+\frac{1}{PF}=\frac{1-x}{2}+\frac{2-2x^2}{2}=\frac{-2x^2-x+3}{2}$,

令 $f(x)=\frac{-2x^2-x+3}{2}$,$f(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递减,$f(x)\in(0,\frac{3}{2})\therefore$存在 θ,D 正确.

12. AC　由题意得 $f(\frac{3}{4}+x)-x=f(\frac{3}{4}-x)+x$,两边求导得 $2f'(\frac{3}{4}+x)-1=-f'(\frac{3}{4}-x)+1$,即 $f'(\frac{3}{4}+x)+f'(\frac{3}{4}-x)=2$,$\therefore g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3}{4},1)$ 对称.

$\because g'(\frac{3}{2}-2x)$ 为奇函数,则 $g'(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}x)+g'(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}x)=0$,

$\therefore y=g'(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3}{2},0)$ 对称,$y=g'(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{3}{4}$ 对称.

$\therefore 3$ 为 $g(x)$ 和 $g'(x)$ 的一个周期,$\therefore g'(0)=g'(\frac{3}{2})=0$,$\therefore g'(3)=g'(0)=0$,$\therefore$A 正确.

$\because g(\frac{3}{4})=1\neq0=g'(\frac{3}{2})$,$\therefore$B 错误.

由 $g'(0)=g'(\frac{3}{2})=g'(3)=0$,得 $g(x)$ 在 $(0,4)$ 上至少有 2 个零点. $\therefore$C 正确.

$\because g(\frac{3}{4})=1$,周期为 3,$g(x)$ 的图象关于 $x=\frac{3}{2}k$ 对称,$\therefore g(\frac{3}{4}k)=1$,$g'(\frac{3}{4})=t$,$\therefore g'(\frac{3}{2})=0$,$g'(\frac{9}{4})=-t$,$g'(\frac{9}{4})=0$,$\therefore \sum_{k=1}^{2024}g'(\frac{3}{4}k)=0$,$\therefore \sum_{k=1}^{2024}\left[g(\frac{3}{4}k)+g'(\frac{3}{4}k)\right]=2024$,$\therefore$D 错误.

13. 240　$T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}(-1)^rx^{-r}=(-1)^rC_6^r2^{6-r}x^{6-2r}$,故 $6-2r=2$,即 $r=2$,所以 $T_3=240x^2$,即 x^2 的系数为 240.

14. $(0,\frac{1}{2}]$　由已知得直线 l 过定点 $(-2,0)$,曲线 C 表示 $x^2+(y-2)^2=4$ 的下半圆,由图形得斜率 m 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2}]$.

15. 7　$\because f(x)\leqslant|f(\frac{\pi}{6})|$,$\therefore$直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 为 $f(x)$ 图象的对称轴.

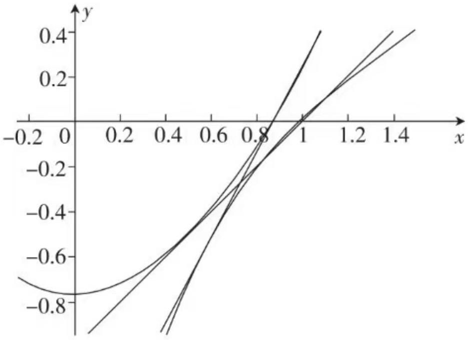
$\because f(x)+f(\frac{4\pi}{3}-x)=0$,$\therefore f(x)$ 的对称点为 $(\frac{2\pi}{3},0)$,$\therefore \frac{2k-1}{4}T=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore T=\frac{2\pi}{2k-1}=\frac{2\pi}{\omega}$,$k\in\mathbf{N}^*$,$\therefore \omega=2k-1$,$k\in\mathbf{N}^*$. 又 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{36},\frac{\pi}{6})$ 上单调,$\therefore \frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{36}=\frac{5\pi}{36}$,$k\in\mathbf{N}^*$.

$\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{5\pi}{18}$,$k\in\mathbf{N}^*$,$\therefore \omega\leqslant\frac{36}{5}$.

当 $\omega=7$ 时，$f(x)=A\sin(7x+\frac{\pi}{3})$ 在 $(\frac{\pi}{36},\frac{\pi}{6})$ 上单调，则正整数 ω 的最大值为 7.

16. -1　∵ $x>0$，变形得 $\ln x\leqslant ax+b\leqslant x^2-\frac{3}{4}$.



问题等价于直线 l：$y=ax+b$ 在 $f(x)=\ln x$ 与 $g(x)=x^2-\frac{3}{4}$ 之间，如图所示.

当且仅当 l 为两函数的公切线时 b 获得最值. 设 l 与 $f(x)$ 的切点为 $A(x_1,\ln x_1)$，l 与 $g(x)$ 的切点为 $B(x_2,x_2^2-\frac{3}{4})$，

由公切线得 $f'(x_1)=\frac{1}{x_1}=g'(x_2)=2x_2$，

得 $\begin{cases}a=\frac{1}{x_1}=2x_2,\\ \ln x_1=ax_1+b,\\ x_2^2-\frac{3}{4}=ax_2+b,\end{cases}$　得 $b=\ln x_1-1=x_2^2-\frac{3}{4}$，$x_1x_2=\frac{1}{2}$，∴ $\ln\frac{1}{2x^2}-1=-x_2^2-\frac{3}{4}$，∴ $x_2^2-\ln 2x_2-\frac{1}{4}=0$，发现 $x_2=\frac{1}{2}$ 为 $x_2^2-\ln 2x_2-\frac{1}{4}=0$ 的一个解.

令 $h(x)=x^2-\ln 2x-\frac{1}{4}$，$h'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$，令 $2x^2-1=0$，得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴ $h(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 上单调递减，在 $(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$ 上单调递增，∴ $h(x)_{\min}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2<\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\sqrt{e}=0$，

而 $x\to 0$，$h(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$，$h(x)\to+\infty$，∴ $x^2-\ln 2x-\frac{1}{4}=0$ 的两根居于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 两侧.

已得一根为 $\frac{1}{2}$，所以另一根大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，由图形分析知，当 $x_2=\frac{1}{2}$，$x_1=1$ 时，b 的最大值为 -1.

17. 解：(1) 由题可得 $a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}$，$a_1=1$，∴ $a_n=2^n-1$，…… 3 分

由 $(2n-3)b_n=(2n-1)b_{n-1}$，推得 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{2n-1}{2n-3}(n\geqslant 2)$，

∴ 累积得 $\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_3}{b_2}=\frac{2n-1}{2n-3}\cdot\frac{2n-3}{2n-5}\cdot\cdots\cdot\frac{5}{3}$，得 $b_n=\frac{2n-1}{3}b_2=2n-1$，

又 $b_1=1$，∴ $b_n=2n-1$. …… 6 分

(2) 由题可得 $c_n=2^n(2n-1)-(2n-1)$，令 $d_n=2^n(2n-1)$，$\{d_n\}$ 的前 n 项和为 P_n.

∴ $P_n=1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)2^n$，$2P_n=1\cdot 2^2+3\cdot 2^3+5\cdot 2^4+\cdots+(2n-1)2^{n+1}$，

相减得 $-P_n=2+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n-1)2^{n+1}$，∴ $P_n=6+(2n-3)2^{n+1}$.

令 $e_n=2n-1$，$\{e_n\}$ 的前 n 项和为 E_n，则 $E_n=n^2$.

综上，$T_n=P_n-E_n=(2n-3)2^{n+1}+6-n^2$. …… 10 分

18. (1) 证明：由题意得 $2\sin A\cos C=\sin B-\sin A=\sin(A+C)-\sin A$，…… 2 分

∴ $\sin(C-A)=\sin A$，∴ $C=2A$. …… 5 分

(2) 解：法一. ∵ CD 为 $\angle ACB$ 的平分线，且 $C=2A$，∴ $\angle ACD=\angle A=\angle DCB$，∴ $AD=CD=\sqrt{3}$，

∴ $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin 2A=\frac{3}{2}\sin 2A=\sqrt{2}$，∴ $\sin 2A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. …… 7 分

∵ $\triangle ABC$ 为锐角三角形，∴ $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，…… 9 分

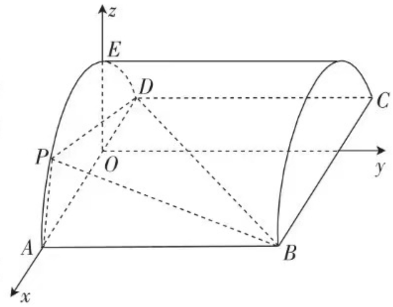
∴ $b=2CD\cos A=2\sqrt{2}$.

∵ $S_{\triangle ACD}+S_{\triangle DCB}=S_{\triangle ACB}$，∴ $\frac{1}{2}b\cdot CD\cdot\sin A+\frac{1}{2}a\cdot CD\cdot\sin A=\frac{1}{2}ab\sin 2A$，

化简得 $CD(a+b)=2a\cos A$，代入 $b=2\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{3}$，$\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，得 $a=\frac{6\sqrt{2}}{5}$. …… 12 分

法二. 在$\triangle BCD$中，$\frac{a}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin B}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}\sin 2A}{\sin(\pi-3A)}=\frac{2\sqrt{3}\sin A\cos A}{3\sin A-4\sin^2 A}=\frac{6\sqrt{2}}{5}$. .... 12 分

19. (1)证明：连接 AP，在半圆柱中，因为 $AB\perp$ 平面 PAD，所以 $AB\perp PD$，又因为 AD 是直径，所以 $PD\perp PA$，则 $PD\perp$ 平面 PAB. 所以 $PD\perp PB$. .... 5 分



(2)解：依题意可知，以线段 AD 的中点 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $E(0,0,2)$，$D(-2,0,0)$，$B(2,4,0)$，$C(-2,4,0)$，设$\angle AOP=\theta$，则 $P(2\cos\theta,0,2\sin\theta)$，所以$\overrightarrow{DE}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，所以$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$则

$\begin{cases}2x_1+2z_1=0,\\ 4y_1=0,\end{cases}$令 $x_1=1$，$z_1=-1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,0,-1)$. .... 7 分

设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{DP}=(2\cos\theta+2,0,2\sin\theta)$，$\overrightarrow{DB}=(4,4,0)$，所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$则

$\begin{cases}(2\cos\theta+2)x_2+2\sin\theta z_2=0,\\ 4x_2+4y_2=0,\end{cases}$令 $x_2=1$，则 $y_2=-1$，$z_2=\frac{-\cos\theta-1}{\sin\theta}$，所以 $\boldsymbol{n}=\left(1,-1,\frac{-\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)$. .... 8 分

因为平面 PBD 与平面 CDE 所成的锐二面角为 45°，

所以 $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}=\left|\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{1+\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2+\left(\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}\right)^2}}\right|$，

令 $t=\frac{\cos\theta+1}{\sin\theta}$，则 $\sqrt{2+t^2}=|1+t|$，平方得 $t=\frac{1}{2}$，即 $\sin\theta=2\cos\theta+2$，又由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 可解得 $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ 或 $\cos\theta=-1$（舍去），所以 $P\left(-\frac{6}{5},0,\frac{8}{5}\right)$，点 P 在平面 $ABCD$ 的射影为点 $H\left(-\frac{6}{5},0,0\right)$，因此 DH 的长度为$\frac{4}{5}$. .... 12 分

20. 解：(1)由题意知卡塔尔世界杯淘汰赛共有 16 场比赛，其中有 5 场比赛通过点球大战决出胜负，所以估计在世界杯淘汰赛阶段通过点球大战分出胜负的概率为$\frac{5}{16}$. .... 3 分

(2)下面为 2×2 列联表：

	欧洲球队	其他球队	合计
进入 8 强	5	3	8
未进入 8 强	8	16	24
合计	13	19	32

零假设 H_0：32 支决赛圈球队闯入 8 强与是否为欧洲球队无关.

$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{32\times(5\times16-3\times8)^2}{8\times24\times13\times19}\approx2.116<6.635=x_{0.01}$.

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，即不能在犯错的概率不超过 0.01 的前提下认为“决赛圈球队闯入 8 强”与是否为欧洲球队有关. .... 7 分

(3)方法一. 不妨假定踢满第一阶段的 5 轮. 因为前两轮两队比分为 2∶2，若甲队在第一阶段获得比赛胜利，则后 3 轮有 6 种比分，1∶0，2∶0，2∶1，3∶0，3∶1，3∶2，所以甲在第一阶段获得比赛胜利的概率 $P=C_3^1p(1-p)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3+C_3^2p^2(1-p)\left(\frac{1}{3}\right)^3+C_3^2p^2(1-p)C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2+p^3\left(\frac{1}{3}\right)^3+p^3C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2+p^3C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{p^3+15p^2+3p}{27}=\frac{1}{27}p^3+\frac{5}{9}p^2+\frac{1}{9}p$. .... 12 分

方法二. 假定比赛进行到任意轮，两队均完成该轮踢点球（实际比赛过程中，只要能确定某队获胜，无需两队

均完成某轮踢点球)两队前 2 轮比分为 2∶2 的条件下，甲在第一阶段获得比赛胜利，则后 3 轮有 5 种可能的比分，1∶0，2∶0，2∶1，3∶1，3∶2.

当后 3 轮比分为 1∶0 时，$p_1=C_3^1p(1-p)^2(\frac{1}{3})^3=\frac{p(1-p)^2}{9}$，

当后 3 轮比分为 2∶0 时，有两种情况，$p_2=p^2(\frac{1}{3})^2+C_2^1p^2(1-p)(\frac{1}{3})^3=\frac{3p^2+2p^2(1-p)}{27}$，

当后 3 轮比分为 2∶1 时，$p_3=p^2(1-p)C_2^1\ \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^2+C_2^1p^2(1-p)C_3^1\ \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^2=\frac{16p^2(1-p)}{27}$，

当后 3 轮比分为 3∶1 时，$p_4=p^3C_2^1\ \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^2=\frac{4p^3}{27}$，

当后 3 轮比分为 3∶2 时，$p_5=p^3C_3^2(\frac{2}{3})^2\ \frac{1}{3}=\frac{4p^3}{9}$.

综上，甲在第一阶段获得比赛胜利的概率 $P=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=\frac{p(1-p)^2}{9}+\frac{3p^2+2p^2(1-p)}{27}+\frac{16p^2(1-p)}{27}+\frac{4p^3}{27}+\frac{4p^3}{9}=\frac{1}{27}p^3+\frac{5}{9}p^2+\frac{1}{9}p$.

方法三. 根据实际比赛进程，假定点球大战中由甲队先踢. 两队前 2 轮比分为 2∶2 的条件下，甲在第一阶段获得比赛胜利，则后 3 轮有 5 种可能的比分，1∶0，2∶0，2∶1，3∶1，3∶2.

当后 3 轮比分为 1∶0 时，甲乙两队均需踢满 5 轮，$p_1=C_3^1p(1-p)^2(\frac{1}{3})^3=\frac{p(1-p)^2}{9}$.

当后 3 轮比分为 2∶0 时，有如下 3 种情况：

2∶0	3	4	5
甲	√	√	
乙	×	×	

2∶0	3	4	5
甲	√	×	√
乙	×	×	

2∶0	3	4	5
甲	×	√	√
乙	×	×	

则 $p_2=p^2(\frac{1}{3})^2+C_2^1p^2(1-p)(\frac{1}{3})^2=\frac{3p^2-2p^3}{9}$.

当后 3 轮比分为 2∶1 时，有如下 6 种情况：

2∶1	3	4	5
甲	√	√	×
乙	√	×	×

2∶1	3	4	5
甲	√	√	×
乙	×	√	×

2∶1	3	4	5
甲	√	×	√
乙	√	×	×

2∶1	3	4	5
甲	√	×	√
乙	×	√	×

2∶1	3	4	5
甲	×	√	√
乙	√	×	×

2∶1	3	4	5
甲	×	√	√
乙	×	√	×

则 $p_3=3p^2(1-p)C_2^1\ \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^2=\frac{4}{9}p^2(1-p)$.

当后 3 轮比分为 3∶1 时，有如下 2 种情况：

3∶1	3	4	5
甲	√	√	√
乙	√	×	

3∶1	3	4	5
甲	√	√	√
乙	×	√	

则 $p_4=p^3C_2^1\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4p^3}{9}$.

当后3轮比分为3∶2时，有如下1种情况：

3∶1	3	4	5
甲	√	√	√
乙	√	√	×

则 $p_5=p^3(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}=\frac{4p^3}{27}$.

综上，在点球大战中两队前2轮比分为2∶2的条件下，甲在第一阶段获得比赛胜利的概率 $P=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=\frac{p(1-p)^2}{9}+\frac{3p^2-2p^3}{9}+\frac{4}{9}p^2(1-p)+\frac{4p^3}{9}+\frac{4p^3}{27}=\frac{1}{27}p^3+\frac{5}{9}p^2+\frac{1}{9}p$.

21. 解：(1)法一. 由 $\begin{cases}a^2+b^2=25,\\ \frac{64}{a^2}-\frac{27}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $a^2=16, b^2=9$. ………… 4分

法二. 左右焦点为 $F_1(-5,0)$ $F_2(5,0)$，∴$c=5$，$2a=|MF_1-MF_2|=\sqrt{196}-\sqrt{36}=8$，∴$a=4$，$b^2=c^2-a^2=9$，∴双曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. ………… 4分

(2)设 CD 的方程为 $x=my+t$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(9m^2-16)y^2+18mty+9t^2-144=0$，

∴$y_1+y_2=\frac{-18mt}{9m^2-16}$，$y_1y_2=\frac{9t^2-144}{9m^2-16}$，$|y_1-y_2|=\frac{24\sqrt{t^2+9m^2-16}}{|9m^2-16|}$， ………… 5分

AC 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+4}(x+4)$，令 $x=2$，得 $y_p=\frac{6y_1}{x_1+4}$，

BD 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-4}(x-4)$，令 $x=2$，得 $y_p=\frac{-2y_2}{x_2-4}$， ………… 7分

∴$\frac{6y_1}{x_1+4}=\frac{-2y_2}{x_2-4}\Leftrightarrow 3x_2y_1-12y_1+x_1y_2+4y_2=0\Leftrightarrow 3(my_2+t)y_1-12y_1+(my_1+t)y_2+4y_2=0\Leftrightarrow 4my_1y_2+(3t-12)y_1+(t+4)y_2=0\Leftrightarrow 4my_1y_2+(2t-4)(y_1+y_2)+(t-8)(y_1-y_2)=0\Leftrightarrow\frac{4m(9t^2-144)}{9m^2-16}-\frac{(2t-4)18mt}{9m^2-16}\pm\frac{24(t-8)\sqrt{t^2+9m^2-16}}{9m^2-16}=0$

$\Leftrightarrow 3m(8-t)\pm(t-8)\sqrt{t^2+9m^2-16}=0\Leftrightarrow(8-t)[3m\pm\sqrt{t^2+9m^2-16}]=0$， ………… 10分

解得 $t=8$ 或 $\sqrt{t^2+9m^2-16}=\pm 3m$，即 $t=8$ 或 $t=4$（舍去）或 $t=-4$（舍去），

∴CD 的方程为 $x=my+8$，∴直线 CD 过定点，定点坐标为 $(8,0)$. ………… 12分

方法二. 设 CD 的方程为 $x=my+t$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$P(2,n)$，

联立 $\begin{cases}x=my+t,\\ \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(9m^2-16)y^2+18mty+9t^2-144=0$，

∴$y_1+y_2=\frac{-18mt}{9m^2-16}$，$y_1y_2=\frac{9t^2-144}{9m^2-16}$，$AC$ 的方程为 $y=\frac{n}{6}(x+4)$，BD 的方程为 $y=\frac{n}{-2}(x-4)$，

∵C,D 分别在 AC 和 BD 上，∴$y_1=\frac{n}{6}(x_1+4)$，$y_2=\frac{n}{-2}(x_2-4)$，

两式相除消去 n 得 $\frac{6y_1}{x_1+4}=\frac{-2y_2}{x_2-4}\Leftrightarrow x_1+4=\frac{-3(x_2-4)y_1}{y_2}$，又 $\frac{x_1^2}{16}-\frac{y_1^2}{9}=1$，$\therefore 9(x_1+4)(x_1-4)=16y_1^2$.

将 $x_1+4=\frac{-3(x_2-4)y_1}{y_2}$ 代入上式，得 $-27(x_1-4)(x_2-4)=16y_1y_2$

$\Leftrightarrow -27(my_1+t-4)(my_2+t-4)=16y_1y_2$

$\Leftrightarrow (27m^2+16)y_1y_2+27(t-4)m(y_1+y_2)+27(t-4)^2=0$

$\Leftrightarrow (27m^2+16)\frac{9t^2-144}{9m^2-16}+27(t-4)m\frac{-18mt}{9m^2-16}+27(t-4)^2=0$.

整理得 $t^2-12t+32=0$，解得 $t=8$ 或 $t=4$（舍去）.

$\therefore CD$ 的方程为 $x=my+8$，$\therefore$ 直线 CD 过定点，定点坐标为 $(8,0)$.

注：法二酌情给分. 如用极点极线得到正确结果但没有具体过程给 4 分.

22. 解：(1) 令 $f'(x)=\frac{x^2-2x+a}{x}=0$，即 $g(x)=x^2-2x+a=0$，$\Delta=4-4a$.

若 $\Delta\leqslant 0$，即当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数. ………… 2 分

若 $\Delta>0$，即当 $a<1$ 时，$g(0)=a$.

①若 $1>a>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1-\sqrt{1-a})$ 上为增函数，在 $(1-\sqrt{1-a},1+\sqrt{1-a})$ 上为减函数，在 $(1+\sqrt{1-a},+\infty)$ 上为增函数.

②若 $a\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1+\sqrt{1-a})$ 上为减函数，$(1+\sqrt{1-a},+\infty)$ 上为增函数. ………… 4 分

(2)①由(1)知 $f(x)$ 有两个极值点，则 $1>a>0$，

由已知得 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=a$，………… 5 分

则 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}x_1^2+a\ln x_1-2x_1+\frac{1}{2}x_2^2+a\ln x_2-2x_2$

$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+a\ln x_1x_2-2(x_1+x_2)-a$

$=a\ln a-a-2$. ………… 6 分

令 $h(a)=a\ln a-a-2$，则 $h'(a)=\ln a<0\ (0<a<1)$，$\therefore h(a)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减.

$\because h(\frac{1}{e^2})=\frac{1}{e^2}\ln\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^2}-2=-\frac{3}{e^2}-2$，$\therefore a$ 的取值范围是 $(\frac{1}{e^2},1)$. ………… 7 分

②证明 $f(x)<\frac{1}{2}x^2+(a-1)\ln x-(a+2)x+xe^x-1$ 恒成立等价于 $ax<xe^x-\ln x-1$ 成立，即 $a<\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$ 成立. ………… 8 分

法一.

令 $g(x)=\frac{xe^x-\ln x-1}{x}$，则 $g'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，令 $h(x)=x^2e^x+\ln x$，则 $h'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}$，

显然在 $(0,+\infty)$ 上，$h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$，$h(x)\to+\infty$.

$\therefore \forall x_0\in(0,+\infty)$，$h(x_0)=0$，即 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，

则 $x\in(0,x_0)$，$g(x)$ 为减函数，$x\in(x_0,+\infty)$，$g(x)$ 为增函数.

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}$. ………… 10 分

$\because x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，$\therefore x_0^2e^{x_0}=-\ln x_0$，$\therefore x_0e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\ln\frac{1}{x_0}$，$\therefore x_0e^{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}e^{\ln\frac{1}{x_0}}$.

令 $t(x)=xe^x$，则 $t'(x)=(x+1)e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上，$t'(x)>0$，$\therefore t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}=-\ln x_0$，即 $x_0e^{x_0}=1$，

$\therefore g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1}{x_0}=\dfrac{1+x_0-1}{x_0}=1$，

$\therefore a<1$，则 $f(x)<\dfrac{1}{2}x^2+(a-1)\ln x-(a+2)x+xe^x-1$ 恒成立.

而已求得 $a\in(e^{-2},1)$，即证得 $f(x)<\dfrac{1}{2}x^2+(a-1)\ln x-(a+2)x+xe^x-1$ 恒成立，………………… 12 分

法二. 变形加放缩.

$\dfrac{xe^x-\ln x-1}{x}=\dfrac{e^{x+\ln x}-\ln x-1}{x}>\dfrac{x+\ln x+1-\ln x-1}{x}=\dfrac{x}{x}=1$，

$\therefore a<1$，则 $f(x)<\dfrac{1}{2}x^2+(a-1)\ln x-(a+2)x+xe^x-1$ 恒成立.

而已求得 $a\in(e^{-2},1)$，即证得 $f(x)<\dfrac{1}{2}x^2+(a-1)\ln x-(a+2)x+xe^x-1$ 恒成立.

法二按上面标准酌情给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线