2023年普通高等学校招生考试模拟试题一（衡水密卷）
数学

本试卷共4页,22题。全卷满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1.答题前，先将自己的姓名、考号等填写在答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2.选择题的作答;选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3.填空题和解答题的作答：用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4.考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题;本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.若$(\mathrm{i}-1)(z-2\mathrm{i})=2+\mathrm{i}$,则$\overline{z}=$

A. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D. $-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

2.已知集合$A=\left\{x\middle|\ y=\ln\left(3x-x^2+4\right)\right\},B=\left\{y\middle|\ y=x^4+t\right\}$,若$A\cap B=A$,则实数$t$的取值范围是

A. $(-\infty,-1]$　　B. $(-\infty,1]$　　C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,1)$

3.已知平面向量$\mathbf{a},\mathbf{b}$满足$|\mathbf{a}|=2,|\mathbf{b}|=1,\mathbf{a}-\mathbf{b}=(\sqrt{3},-2)$,则$|2\mathbf{a}-\mathbf{b}|=$

A. $\sqrt{15}$　　B. $4\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{21}$　　D. 33

4.分形几何学是数学家伯努瓦-曼德尔布罗在20世纪70年代创立的一门新的数学学科,它的创立为解决众多传统科学领域的难题提供了全新的思路.按照如图1所示的分形规律可得如图2所示的一个树形图.记图2中第n行黑圈的个数为a_n,若$a_n=144$,则$n=$

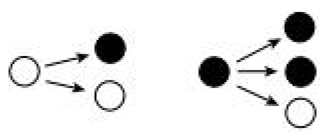


图1

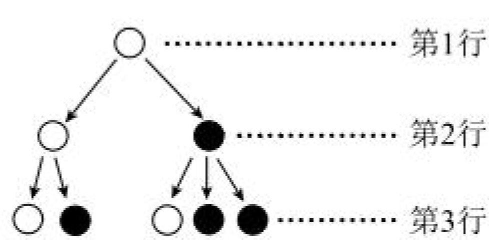


图2

A. 5　　　B. 6　　　C. 7　　　D. 8

5. 已知直线 $l: y=3x$ 与圆 $C: x^2+y^2-4y=0$ 相交于 A,B 两点，则 $\triangle ABC$ 的面积为

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　　B. $\dfrac{6}{5}$　　　C. $\dfrac{2\sqrt{38}}{5}$　　　D. 5

6. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $3, M, N$ 分别为棱 AA_1, CC_1 的中点，点 Q 是棱 A_1D_1 上靠近点 D_1 的三等分点，则平面 MNQ 截该正方体所得截面的面积为

A. $\sqrt{34}$　　　B. $2\sqrt{34}$　　　C. 10　　　D. 12

7. 某大型超市设立了“助农促销”专区，销售各种农产品，积极解决农民农副产品滞销问题. 为加大农产品销量，该超市进行了有奖促销活动，凡购买专区的农产品每满 100 元的顾客均可参加该活动，活动规则如下：将某空地划分为(1)(2)(3)(4)四个区域，顾客将一皮球投进区域(1)或者(2)一次，或者投进区域(3)两次，或者投进区域(4)三次，便视为中奖，投球停止，且投球次数不超过四次. 已知顾客小王每次都能将皮球投进这块空地，他投进区域(1)与(2)的概率均为 $p(0<p<1)$，投进区域(3)的概率是投进区域(1)的概率的 2 倍，且每次投皮球相互独立. 小王第二次投完皮球首次中奖的概率记为 P_1，第四次投完皮球首次中奖的概率记为 P_2，若 $P_1>P_2$，则 p 的取值范围为

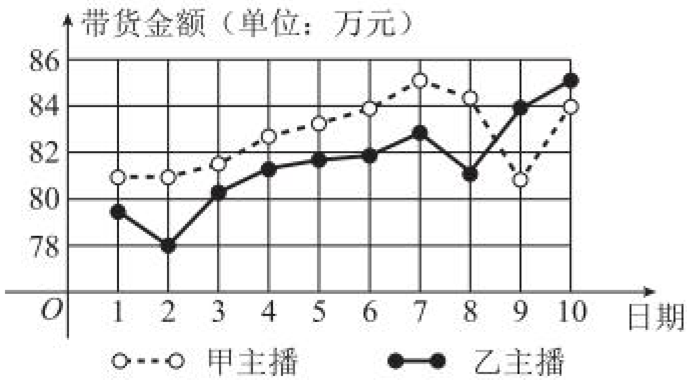
A. $\left(0,\dfrac{3-\sqrt{3}}{12}\right)$　　　B. $\left(0,\dfrac{3+\sqrt{3}}{12}\right)$　　　C. $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{12},\dfrac{1}{4}\right)$　　　D. $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{12},\dfrac{3+\sqrt{3}}{12}\right)$

8. 已知双曲线 $C: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F，双曲线 C 上的两点 A,B 关于原点 O 对称（其中点 A 在双曲线 C 的右支上），且 $|OA|=|OF|$，双曲线 C 上的点 D 满足 $\overrightarrow{DF}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{FB}$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{109}}{7}$　　　B. $\dfrac{\sqrt{59}}{7}$　　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　　D. $\dfrac{109}{49}$

二、选择题；本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 2022 年秋，我国南方某地脐橙大丰收，甲、乙两名网红主播为帮助该地销售脐橙，开启了连续10天针对该地脐橙的直播带货专场，下面统计图是甲、乙两名主播这10天的带货数据：则下列说法中正确的有：



A. 甲主播10天带货总金额超过乙主播10天带货总金额

B. 乙主播10天带货金额的中位数低于82万元

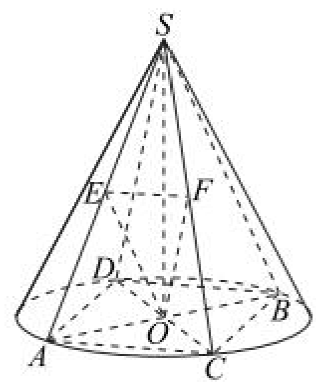
C. 甲主播10天带货金额的极差小于乙主播 10天带货金额的极差

D. 甲主播前7天带货金额的标准差大于乙主播前7天带货金额的标准差

10. 已知 $\dfrac{c^5}{b}<\dfrac{c^5}{a}<0$，则下列不等式一定成立的有

A. $\dfrac{b}{a}>1$　　B. $\dfrac{a-b}{c}<0$　　C. $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+c^2}{b+c^2}$　　D. $bc<ba$

11. 如图，已知圆锥的顶点为 S，底面 $ACBD$ 的两条对角线恰好为圆 O 的两条直径，E,F 分别为 SA,SC 的中点，且 $SA=AC=AD$，则下列说法中正确的有



A. SD // 平面 OEF

B. 平面 OEF // 平面 SBD

C. $OE\perp SA$

D. 直线 EF 与 SD 所成的角为 45°

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-2x^2+2, x\le 1,\\ 2^x-2, x>1,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(f(x))]^2=(m+2)f(f(x))-2m$ 至少有 8 个不等的实根，则实数 m 的取值不可能为

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2022 年卡塔尔世界杯期间，3 男 3 女共 6 位球迷赛后在比赛场地站成一排合影留念，则男、女球迷相间排列的概率为________.

14. 勾股数是指可以构成一个直角三角形三边的一组正整数，若椭圆 C 的一个焦点把长轴分成长度分别为 m,n 的两段，且 $m,n,10$ 恰好为一组勾股数，则 C 的一个标准方程为________.（写出满足条件的一个即可）

15. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi| \quad \dfrac{\pi}{2}\right)$，若 $f\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=0$，对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{5\pi}{72},\dfrac{\pi}{9}\right)$ 上单调，则 ω 的最大值为________.

16. 已知函数 $f(x)=2023e^{x}-ax^{2}-1(a\in R)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_2\geq 2x_1$，则实数 a 的取值范围为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{n+1}-2=S_n+a_n$，_______.

请在(1) $a_2+a_9=20$；(2) a_1,a_2,a_5 成等比数列；(3) $S_5=a_2+a_4+15$，这三个条件中任选一个补充在上面题干中，并解答下列问题.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=a_n-10$，求数列 $\{|b_n|\}$ 的前 n 项和 T_n.

注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分.

18.（本小题满分 12 分）

沙漠治理能使沙漠变成一片适宜居住的地方，不让沙漠扩大化. 近 30 年来，我国高度重视防沙治沙工作，相继采取了一系列重大举措加快防沙治沙步伐，推动我国防沙治沙事业. 我国某沙漠地区采取防风固沙、植树造林等多措并举的方式，让沙漠变绿洲，通过统计发现，该地区沙漠面积 y（单位：公顷）与时间 x（单位：年）近似地符合 $y=\dfrac{b}{x}+a(a,b\in\mathbf{R})$ 回归方程模型（以 2016 年作为初始年份，x 的值为 1)，计算 2016 年至 2022 年近 7 年来的 y 与 x 的相关数据，得 $\overline{x}=4,\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i=7212$，$\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i=1586,\overline{t}\approx 0.37,\sum\limits_{i=1}^{7}t_i^2-7\overline{t}^2\approx 0.55$（其中 $t_i=\dfrac{1}{x_i},x_i$ 表示第 i 年，$1 \quad i \quad 7,i\in\mathbf{Z}$)

年份	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年数 x	1	2	3	4	5	6	7
沙漠面积 y	891	888	351	220	200	138	112

(1)求 y 关于 x 的回归方程;

(2)从 2016 年起开始计算,判断第 24 年该地区所剩的沙漠面积是否会小于 75 公顷.

附:对于一组数据 $(u_1,v_1),(u_2,v_2),\cdots,(u_n,v_n)$,其回归直线方程 $\hat{v}=\hat{\beta}u+\hat{\alpha}$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i-n\overline{u}\overline{v}}{\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2-n\overline{u}^2},\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}$.

19.(本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 $a,b,c,2(c\sin C-a\sin C\cos B)-c\sin B=0$.

(1)若 $c\tan C=b\tan B$,求证:$\triangle ABC$ 是等边三角形;

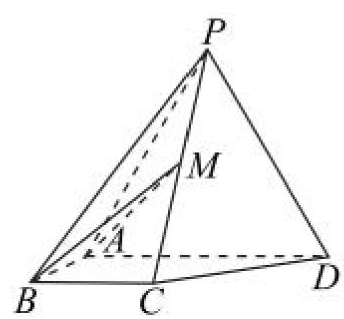
(2)已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,求 $\dfrac{bc}{a+b+c}$ 的最大值.

20.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$\triangle PAD$ 为等边三角形,$AD//BC,AB\perp BC$,且 $PC=AD=2AB=2BC=2$,平面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$.

(1)证明:$AB\perp$ 平面 PAD;

(2)点 M 为棱 PC 的中点,求二面角 $M-AB-P$ 的正弦值.



21.(本小题满分 12 分)

已知点 $M(1,-2)$ 在抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 上,过点 $N(0,-1)$ 的直线 l 与 C 相交于 A,B 两点,直线 MA,MB 分别与 y 轴相交于点 D,E.

(1)当弦 AB 的中点横坐标为 3 时,求 l 的一般方程;

(2)设 O 为原点,若 $\overrightarrow{DN}=m\overrightarrow{ON},\overrightarrow{EN}=n\overrightarrow{ON}$,求证:$\dfrac{mn}{m+n}$ 为定值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=m(\ln x-1)-(2-m)x,(m\neq 0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)设函数 $F(x)=f(x)+2\sin x+1$,求证:当 $m=1$ 时,$F(x)$ 恰有两个零点.