宜宾市2020级高三第一次诊断性试题（参考答案）

数 学（理工类）

注意：

一、本解答给出了一种解法仅供参考，如果考生的解法与本解答不同，可比照评分意见制订相应的评分细则.

二、对解答题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半，如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分.

一、选择题：**本大题共12个小题，每小题5分，共60分.**

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	A	C	B	C	C	B	A	C	D

二、填空题：**本大题共4个小题，每小题5分，共20分.**

13. 5；　　14. -30；　　15. $[\frac{19}{12},\frac{25}{12})$；　　16. $\frac{e}{4}$

三、**解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.**

17. 解：（1）供电量与需求量的比值由小到大排列，第5个数，第6个数分别为0.85,0.86 ……………2分

$\therefore$ 所求中位数$=\frac{0.85+0.87}{2}=0.86$ ……………………………………4分

（2）2×2列联表

	不受影响	受影响	合计
A区	7	3	10
B区	4	6	10
合计	11	9	20

……………………………………………………………………8分

$K^2=\frac{20(7\times6-4\times3)^2}{11\times9\times10\times10}=\frac{20}{11}\approx1.818<3.841$ ……………………………11分

$\therefore$ 没有95%的把握认为生产有影响与企业所在区有关……………………………12分

18. 解：（1）当$n=1$时，$S_1=\frac{a_1a_2}{2},1=\frac{a_2}{2},a_2=2$；

当$n=2$时，$S_2=\frac{a_2a_3}{2},3=\frac{2a_3}{2},a_3=3$； ……………………………2分

猜想 $a_n=n$ ………………………………………………4分

证明如下：

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 成立；

假设 $n=k$ 时，$a_k=k$ 成立；

那么 $n=k+1$ 时，$S_k=\frac{a_k a_{k+1}}{2}, a_{k+1}=\frac{2S_k}{a_k}=\frac{2(1+2+\cdots+k)}{k}=\frac{2\times\frac{(k+1)k}{2}}{k}=k+1$ 也成立.

则对任意的 $n\in N^*$，都有 $a_n=n$ 成立……6 分

（2）$b_n=n+2^n$，……8 分

$T_n=(1+2+\cdots+n)+(2^1+2^2+\cdots 2^n)=\frac{(1+n)n}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+2^{n+1}-2$ ……12 分

19. 解：（1）$\frac{c\sin C}{\sin A}-c=\frac{b\sin B}{\sin A}-a$，$\frac{c^2}{a}-c=\frac{b^2}{a}-a$，$c^2-ac=b^2-a^2$，

所以 $a^2+c^2-b^2=ac, \cos B=\frac{1}{2}$……2 分

$c^2-2c^2=4-4c^2$，……4 分

$3c^2=4, c^2=\frac{4}{3}, c=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$a=2c=\frac{4}{\sqrt{3}}$，

周长 $=a+b+c=\frac{4}{\sqrt{3}}+2+\frac{2}{\sqrt{3}}=2+2\sqrt{3}$……6 分

（2）$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BD}$，$(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})^2=4\overrightarrow{BD}^2$，$\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{BD}^2$，

$a^2+c^2+2ac\cdot\cos B=4|BD|^2$，$a^2-c^2+2ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=4|BD|^2$，$2a^2-2c^2-b^2=4|BD|^2$，……8 分

$\because c^2-ac=b^2-a^2, \therefore c^2-ac=4-a^2, ac=a^2+c^2-4$，

$\because ac\le\frac{a^2+c^2}{2}$，当且仅当 $a=c=2$ 时，等号成立. $\therefore a^2+c^2-4\le\frac{a^2+c^2}{2}$

$\frac{a^2+c^2}{2}\le 4, a^2+c^2\le 8$，$4|BD|^2=2a^2+2c^2-b^2=2a^2+2c^2-4\le 2\times 8-4=12, |BD|^2\le 3, |BD|\le\sqrt{3}$

$\therefore |BD|$ 的最大值为 $\sqrt{3}$……12 分

20. （1）X 的取值为 0,1,2

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$；$P(X=2)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；……4 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$

……5 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{5}{8}+2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{8}$； ………………………………………… 6 分

(2)（i）由题意：第一次传球后，球落在乙或丙手中，则 $a_1=0$，$n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2$ 时，第 n 次传给甲的事件是第 $n-1$ 次传球后，球不在甲手上并且第 n 次必传给甲的事件，

于是有 $a_n=\frac{1}{2}(1-a_{n-1})$，即 $a_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_{n-1}-\frac{1}{3}\right)$，

数列 $\{a_n-\frac{1}{3}\}$ 是首项为 $a_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列……………………………… 9 分

（ii）$a_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，所以 $a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$， ………………………………11 分

当 $n\to+\infty$ 时，$a_n\to\frac{1}{3}$，所以当传球次数足够多时，球落在甲手上的概率趋向于一个常数 $\frac{1}{3}$ …………12 分

21. 解：（1）先证 $\sin x<x$，

令 $g(x)=x-\sin x$，$g'(x)=1-\cos x>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(0)=0$，

即 $x-\sin x>0, x>\sin x$ ………………………………………… 2 分

再证 $x<\ln\frac{1}{1-x}$，

令 $h(x)=\ln\frac{1}{1-x}-x=-\ln(1-x)-x$，$h'(x)=\frac{-1}{1-x}\cdot(-1)=\frac{1-1+x}{1-x}=\frac{x}{1-x}$，

$\because 0<x<1,\therefore h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

$h(x)>h(0)=0$，即 $\ln\frac{1}{1-x}-x>0,\ln\frac{1}{1-x}>x$ ………………………………………… 4 分

（2）$\because \sin x<\ln\frac{1}{1-x}$，

$\therefore \sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\cdots+\sin\frac{1}{n}<\ln\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\ln\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\cdots+\ln\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}=\ln n$， ……………… 6 分

要证 $\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\cdots+\sin\frac{1}{n}<f(n)$，只需证 $\ln n<f(n)$，

即证 $\ln n<e^{an}-n$，即证 $e^{an}-n-\ln n>0$，$\because a\geq\frac{1}{2},\therefore e^{an}\geq e^{\frac{1}{2}n},e^{an}-n-\ln n\geq e^{\frac{1}{2}n}-n-\ln n$， ……………… 7 分

要证 $e^{an}-n-\ln n>0$，即证 $e^{\frac{1}{2}n}-n-\ln n>0(n\in N^*,n\geq 2)$

令 $F(x)=(e^{\frac{1}{2}})^x-x-\ln x$，$F'(x)=\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}})^x-1-\frac{1}{x}$，

$F'(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，

$F'(2)<0$，$F'(3)>0$，

所以 $F'(x)$ 在区间 $(2,3)$ 上存在零点 x_0

且 $F(x)$ 在 $[2,x_0)$ 上单调递减，$[x_0,+\infty)$ 上单调递增， ………………………………………… 10 分

而 $F(2)=e-2-\ln 2>0$， $F(3)=e^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}-\ln\frac{3}{2}>0$

所以 $x\in[3,+\infty),F(x)\geqslant F(3)>0$

所以， $e^{\frac{1}{2}n}-n-\ln n>0(n\in N^{*},n\geqslant 2)$ 得证……12 分

22.解：（1）由 $\begin{cases}x=\dfrac{2\sqrt{3}t}{1+t^2},\\ y=\dfrac{2\sqrt{3}}{1+t^2}\end{cases}$ 得，$y\in(0,2\sqrt{3}),t=\dfrac{x}{y}$，

代入 $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{1+t^2}$，得 C 的普通方程为 $x^2+y^2-2\sqrt{3}y=0,y\in(0,2\sqrt{3})$，……3 分

C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\sqrt{3}\rho\sin\theta=0,\rho\neq 0$

化简得：$\rho-2\sqrt{3}\sin\theta=0,\rho\neq 0$……5 分

（2）l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数，$t\in R$），代入 $x^2+y^2-2\sqrt{3}y=0$，

得到 $t^2-4\sqrt{3}t+9=0$，……7 分

$\therefore\Delta=48-36=12,t_A+t_B=4\sqrt{3}$，$t_At_B=9$，

$\therefore|PA|+|PB|=t_A+t_B=4\sqrt{3},|AB|=\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}$.

$\therefore|PA|+|PB|=2|AB|$

$\therefore|PA|,|AB|,|PB|$ 成等差数列……10 分

23.解：（1）$f(x)=|x-2|+|x+1|-1$

由 $f(x)<6$，得 $\begin{cases}x<-1,\\ 2-x-x-1+1<6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2-x+x+1+1<6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2,\\ x-2+x+1+1<6,\end{cases}$……3 分

即 $-2<x<-1$ 或 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 或 $2<x<3$

$\therefore f(x)<6$ 的解集为 $(-2,3)$，……5 分

（2）$f(x)\geqslant|(x-2a)-(x+b)|+c=2a+b+c$，

当 $x=2a$ 时取等号，$f(x)_{\min}=2a+b+c=7$……7 分

由柯西不等式得 $\sqrt{a}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2a}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+2}$

$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}+1+1}\sqrt{2a+(b+1)+(c+2)}=5$$

当 $\dfrac{\sqrt{2a}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{b+1}=\sqrt{c+2}$，即 $a=1,b=3,c=2$ 时取等号．

$\therefore\sqrt{a}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+2}$ 的最大值为 5．……………………………………………………………………10 分