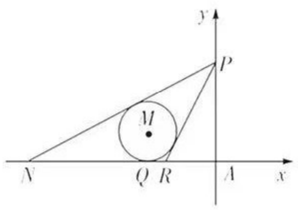
2023年甘肃省第一次高考诊断考试

理科数学试题答案及评分参考

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.C　2.B　3.B　4.B　5.A　6.D　7.C　8.B　9.A　10.C　11.D　12.A

11．解：以 A 为原点建立平面直角坐标系，则 $P(0,4)$，$R(-3,0)$，直线 PR 的方程为 $4x-3y+12=0$，



设 $M(m,1)$，$Q(m,0)$，由 M 到直线 PR 的距离为1，得 $\dfrac{|4m-3+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$，解之得 $m=-\dfrac{7}{2}$ 或 $m=-1$（舍），则 $M(-\dfrac{7}{2},1)$，$Q(-\dfrac{7}{2},0)$，

又设直线 PN 的方程为 $y=kx+4$，由 M 到直线 PN 的距离为1，得 $\dfrac{\left|-\dfrac{7}{2}k+4-1\right|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，整理得 $45k^2-84k+32=0$，则 $k_{PR}\cdot k_{PN}=\dfrac{32}{45}$，又 $k_{PR}=\dfrac{4}{3}$，故 $k_{PN}=\dfrac{8}{15}$，则直线 PN 的方程为 $y=\dfrac{8}{15}x+4$，则 $N(-\dfrac{15}{2},0)$，故 $NQ=-\dfrac{7}{2}+\dfrac{15}{2}=4=a+c$，$RQ=-3+\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{2}=a-c$，

则 $\begin{cases}a+c=4\\a-c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=\dfrac{9}{4}\\c=\dfrac{7}{4}\end{cases}$，故椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{9}{4}}=\dfrac{7}{9}$，

故选D．

12．解：函数 $f_1(x)=x^2-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{2023}=1$，

所以 $T_1=|f_1(a_1)-f_1(a_0)|+|f_1(a_2)-f_1(a_1)|+\cdots+|f_1(a_{2023})-f_1(a_{2022})|$

$=-f_1(a_0)+f_1(a_1)-f_1(a_1)+f_1(a_2)-\cdots-f_1(a_{2022})+f_1(a_{2023})$

$=-f_1(a_0)+f_1(a_{2023})=f_1(1)-f_1(0)=1$．

因为 $f_2(x)=e^{-\left|x-\frac{1}{2}\right|}=\begin{cases}e^{x-\frac{1}{2}},x\le\dfrac{1}{2}\\e^{\frac{1}{2}-x},x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$，故 $f_2(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单

调递减，

因为 $f_2(1-x)=\mathrm{e}^{-\left|(1-x)-\frac{1}{2}\right|}=\mathrm{e}^{-\left|x-\frac{1}{2}\right|}=f_2(x)$，所以，函数 $f_2(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，

由题意可知 $a_i+a_{2\,023-i}=1(i=0,1,2,\cdots,1\,011)$，则 $f_2(a_i)=f_2(a_{2\,023-i})$，

因为 $a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{1\,011}<\frac{1}{2}$，

所以 $T_2=|f_2(a_1)-f_2(a_0)|+|f_2(a_2)-f_2(a_1)|+\cdots+|f_2(a_{2\,023})-f_2(a_{2\,022})|$

$=2[|f_2(a_1)-f_2(a_0)|+|f_2(a_2)-f_2(a_1)|+\cdots+|f_2(a_{1\,011})-f_2(a_{1\,010})|]$

$=2[-f_2(a_0)+f_2(a_1)-f_2(a_1)+f_2(a_2)-\cdots-f_2(a_{1\,010})+f_2(a_{1\,011})]$

$=2[f_2(a_{1\,011})-f_2(a_0)]<2\left[f_2\left(\frac{1}{2}\right)-f_2(0)\right]=2-\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}<1$，

故选 A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 4　　14. $\frac{2\sqrt{10}}{3}$　　15. 10239　　16. $\frac{63}{8}$

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases}a_6=a_1+5d=2,\\ S_5=5a_1+10d=5,\end{cases}$ 解得 $a_1=d=\frac{1}{3}$，

所以 $a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n}{3}$； ………………………………………………………… 3 分

当 $n=1$ 时，$b_1=2^2-2=2$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n=2^{n+1}-2$，可得 $b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}=2^n-2$，

上述两个等式作差可得，$b_n=2^{n+1}-2^n=2^n$，$b_1=2$ 也满足 $b_n=2^n$，

故对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$b_n=2^n$. ………………………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 得：$c_n=\frac{1}{3a_n\cdot\log_2 b_{n+1}}=\frac{1}{3\cdot\frac{n}{3}\cdot(n+1)}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

所以 $T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$，

由 $T_n\geqslant\frac{2\,023}{2\,024}$ 得：$1-\frac{1}{n+1}\geqslant\frac{2\,023}{2\,024}$，即 $n\geqslant 2\,023$，

则满足 $T_n\geqslant\frac{2\,023}{2\,024}$ 的最小正整数 $n=2\,023$. ……………………………………… 12 分

18.（12 分）

解：(1) 由频率分布直方图得：

$2(0.02+0.03+0.05+0.05+0.15+a+0.05+0.04+0.01)=1$,

解得 $a=0.10$. ………………………………………………………………………… 2 分

(2)由频率分布直方图得:

这 800 名学生中周平均阅读时间在(12,14],(14,16],(16,18]三组内的学生人数分别为:

$800\times0.05\times2=80$ 人,$800\times0.04\times2=64$ 人,$800\times0.01\times2=16$ 人,

若采用分层抽样的方法抽取了 10 人,则从周平均阅读时间在(14,16]内的学生中抽取:

$\frac{64}{80+64+16}\times10=4$ 人,现从这 10 人中随机抽取 3 人,则 X 的可能取值为 0,1,2,3,

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$;$P(X=1)=\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$;

$P(X=2)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$;$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$,

$\therefore X$ 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$. ……………………………………………… 8 分

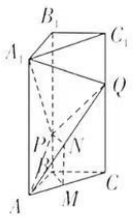
(3)$k=10$,理由如下:

由频率分布直方图得学生周平均阅读时间在(8,12]内的概率为$\frac{1}{2}$,从该校所有学生中随机抽取 20 名学生,恰有 k 名学生周平均阅读时间在(8,12]服从二项分布 $X\sim B(20,\frac{1}{2})$,

$P(k)=C_{20}^k(\frac{1}{2})^k(1-\frac{1}{2})^{20-k}=C_{20}^k(\frac{1}{2})^{20}$,由组合数的性质可得 $k=10$ 时 $P(k)$ 最大. …
………………………………………………………………………………………… 12 分

19.(12 分)

解:(1)证明:在图乙中,过 M 作 $MN/\!/CQ$,交 AQ 于 N,连接 PN,



则 $MN/\!/PB$,所以 M,N,P,B 共面且平面 $MNPB\cap$平面 $APQ=PN$,

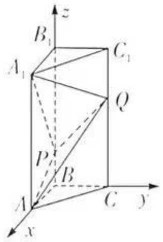
因为 $AB=3,BC=4$,所以 $AC=5$,

又 $AA'A'_1A_1$ 为正方形,所以 $QC=7$,$\tan\angle QAC=\frac{7}{5}$,

由 $AM=\frac{15}{7}$，得 $MN=BP=3$，所以四边形 $MNPB$ 为平行四边形，则 $BM/\!/PN$，

又 $PN\subset$ 平面 APQ，$BM\not\subset$ 平面 APQ，所以 $BM/\!/$ 平面 APQ. ………………………… 6 分

（2）由（1）知 $AC^2=AB^2+BC^2$，所以 $AB\perp BC$，则分别以 BA,BC,BB_1 为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



由 $PB=3$，$QC=7$，得 $A(3,0,0)$，$P(0,0,3)$，$Q(0,4,7)$，所以 $\overrightarrow{AP}=(-3,0,3)$，$\overrightarrow{AQ}=(-3,4,7)$，

设平面 APQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=-3x+3z=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AQ}=-3x+4y+7z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$，

又 $A_1(3,0,12)$，则 $\overrightarrow{A_1P}=(-3,0,-9)$，$\overrightarrow{A_1Q}=(-3,4,-5)$，

设平面 A_1PQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1P}=-3x-9z=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1Q}=-3x+4y-5z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}_2=(-3,-1,1)$，

设二面角 $A-PQ-A_1$ 的平面角为 θ，则 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{33}}{33}$，

如图所示二面角 $A-PQ-A_1$ 的平面角为钝角，

所以平面 APQ 与平面 A_1PQ 所成角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{33}}{33}$. ………………………… 12 分

20.（12 分）

解：（1）$\because$ 动圆过定点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，且与直线 $x=-\frac{1}{2}$ 相切，

$\therefore$ 曲线 C 是以点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 为焦点，直线 $x=-\frac{1}{2}$ 为准线的抛物线，

其方程为：$y^2=2x$. ………………………………………………………… 4 分

（2）设直线 AB 的方程为 $y=k_1(x-1)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y^2=2x\\ y=k_1(x-1)\end{cases}$，可得 $k_1^2x^2-(2k_1^2+2)x+k_1^2=0$，

则 $\Delta=(2k_1^2+2)^2-4k_1^4=4(2k_1^2+1)>0$，

且 $x_1+x_2=\frac{2k_1^2+2}{k_1^2}=2+\frac{2}{k_1^2}$，$x_1x_2=\frac{k_1^2}{k_1^2}=1$， ………………………………… 6 分

故 $P(1+\frac{1}{k_1^2},\frac{1}{k_1})$，同理可得 $Q(1+\frac{1}{k_2^2},\frac{1}{k_2})$，

则直线 PQ 的方程为 $y-\frac{1}{k_1}=\dfrac{\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}}{\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{k_1^2}}(x-1-\frac{1}{k_1^2})$，又 $k_1+k_2=2$，

直线 PQ 的方程可化为 $y=\frac{k_1k_2}{2}(x-1-\frac{1}{k_1^2})+\frac{1}{k_1}=\frac{k_1k_2}{2}x-\frac{k_1k_2}{2}-\frac{k_2-2}{2k_1}=\frac{k_1k_2}{2}(x-1)+\frac{1}{2}$，

故直线 PQ 经过定点 $D(1,\frac{1}{2})$，

所以 T 到直线 PQ 的距离的最大值为 $|DT|=\sqrt{(1-1)^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}$. ……………… 12 分

21.（12 分）

解：(1) 证明：$f(x)=a\ln x(a>0)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

令 $g(x)=\ln x-x+1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 为增函数；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 为减函数，

故 $g(x)\leqslant g(1)=0$，

所以当 $a=1$ 时，$\ln x\leqslant x-1$，即 $f(x)\leqslant x-1$. ………………………………………………… 4 分

(2) ①解：令 $h(x)=a\ln x-x$，则 $h'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$，

当 $0<x<a$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h(x)$ 为增函数；当 $x>a$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 为减函数，

故 $h(x)\leqslant h(a)=a\ln a-a$，

要让 $f(x)\leqslant x$ 对 $x>0$ 恒成立，只需 $h(a)=a\ln a-a\leqslant 0$，

令 $\varphi(x)=x\ln x-x$，则 $\varphi'(x)=\ln x$，可知当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)>0$，函数 $\varphi(x)$ 为增函数，

又因为当 $0<x<e$ 时，$\varphi(x)=x(\ln x-1)<0$，而 $\varphi(e)=0$，

所以当 $0<x\leqslant e$ 时，$\varphi(x)\leqslant 0$，

所以 a 的最大值为 e. ………………………………………………………………………… 8 分

②证明：由①可知，当 a 取最大值时，$H(x)=\frac{e+1}{2}x^2-2ex\ln x$，

不妨设 $x_1>x_2$，要证对于 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，恒有 $\frac{H(x_1)-H(x_2)}{x_1-x_2}>-e$，

需证对于 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$，恒有 $\frac{e+1}{2}x_1^2+ex_1-2ex_1\ln x_1>\frac{e+1}{2}x_2^2+ex_2-2ex_2\ln x_2$，

令 $F(x)=\frac{e+1}{2}x^2+ex-2ex\ln x$，

则 $F'(x)=(e+1)x+e-2e(\ln x+1)=(e+1)x-2e\ln x-e$，

由 (1) 知 $\ln x\leqslant x-1$，由①知 $e\ln x\leqslant x$，即 $\ln x\leqslant\frac{x}{e}$，又由于两式等号成立的条件不同，相加可

得 $2\ln x<\frac{e+1}{e}x-1$，所以 $F'(x)=(e+1)x-2e\ln x-e>0$，

所以 $F(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，

所以 $F(x_1)>F(x_2)$，

因此，当 a 取最大值时，对于 $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)(x_1\neq x_2)$，恒有 $\frac{H(x_1)-H(x_2)}{x_1-x_2}>-e$. ……

………………………………………………………………………… 12 分

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中选定一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑. 按所涂题号进行评分，不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

解：(1) $\begin{cases}x=-1+2\cos\alpha\\y=3+2\sin\alpha\end{cases}$，所以 $(x+1)^2+(y-3)^2=4$，即为圆 C 的普通方程.

因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，$l$：$3\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta+6=0$，

所以 l 的直角坐标方程为 $3x+4y+6=0$. ………………………………………… 5 分

(2) 圆心 $C(-1,3)$ 到直线 l：$3x+4y+6=0$ 的距离 $d=\frac{|-1\times3+4\times3+6|}{5}=3$，

因为点 M 是直线 l 上任意一点，所以 $|MC|\geqslant d=3$，所以四边形 $AMBC$ 面积

$S=2\times\frac{1}{2}|AC||AM|=|AC||AM|=|AC|\sqrt{|MC|^2-|AC|^2}=2\times\sqrt{|MC|^2-4}$

$\geqslant2\times\sqrt{d^2-4}=2\sqrt{5}$.

即当 $MC\perp l$ 时，四边形 $AMBC$ 面积取得最小值为 $2\sqrt{5}$. ……………………………… 10 分

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

解：(1) 因为 $f(x)=|x-2|-2|x-1|=\begin{cases}x, & x\leqslant1,\\-3x+4, & 1<x<2,\\-x, & x\geqslant2.\end{cases}$ 由 $f(x)\leqslant4x+1$，得

$\begin{cases}x\leqslant1,\\x\leqslant4x+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1<x<2,\\-3x+4\leqslant4x+1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant2,\\-x\leqslant4x+1.\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant1$ 或 $1<x<2$ 或 $x\geqslant2$，

故所求不等式的解集为 $\left\{x\middle|x\geqslant-\frac{1}{3}\right\}$. ………………………………………… 5 分

(2) 因为 $f(x)+|x-2|=2|x-2|-2|x-1|\leqslant2|x-2-(x-1)|=2$，

当且仅当 $(x-2)(x-1)\geqslant0$ 时等号成立，即 $x\leqslant1$ 或 $x\geqslant2$ 时等号成立，

所以 $a^2-a>2$，则 a 的取值范围为 $a<-1$ 或 $a>2$. ………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。