

华大新高考联盟 2018 届高三 4 月教学质量测评

文科数学参考答案和评分标准

一、选择题

1. 【答案】C

【命题意图】考查集合的运算和不等式解法.

【解析】∵ $B = \{x | -2 < x < 2\}$, ∴ $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$. ∴ 选 C.

2. 【答案】B

【命题意图】考查复数的基本概念和运算.

【解析】计算得 $z = 1 + i$, $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. ∴ 选 B.

3. 【答案】D

【命题意图】考查双曲线的渐近线.

【解析】渐近线 $y = \pm \frac{2}{\sqrt{m}}x$, ∴ $\frac{2}{\sqrt{m}} = \frac{2}{3}$, ∴ $m = 9$. ∴ 选 D.

4. 【答案】D

【命题意图】考查古典概型.

【解析】方法一 将五个节日分别简记为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , 五个节日中选两个节日共有: $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5$ 10 种, 不选春节和端午节的有 3 种,

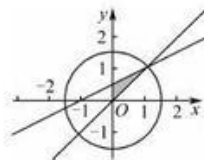
∴ $P = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$. ∴ 选 D.

方法二 将五个节日分别简记为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , 五个节日中选两个节日共有: $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5, A_3A_4, A_3A_5, A_4A_5$ 10 种, 春节和端午节至少有一个的有 7 种, ∴ $P = \frac{7}{10}$. ∴ 选 D.

5. 【答案】B

【命题意图】考查线性规划有关知识.

【解析】不等式组 $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0, \\ y \geq x, \\ x \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域如图中阴影部分所示,



∴ $0^2 + 0^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1^2 + 1^2$. ∴ 选 B.

6. 【答案】A

【命题意图】考查分段函数求值, 指数不等式以及充要条件.

【解析】 $f(-1) = 2, f(2) = 2^{2m+1} > 4 \Rightarrow 2m + 1 > 2 \Rightarrow m > \frac{1}{2}$,

∴ $m > 1, \therefore m > \frac{1}{2}$; 但 $m > \frac{1}{2} \not\Rightarrow m > 1$. ∴ 选 A.

7. 【答案】C

【命题意图】考查对程序框图的逻辑结构的理解.

【解析】由程序框图得, 第一步, $i = 1, S = 0 + \frac{1}{1 \times 2}, i < 10$; 第二步, $i = 2, S = 0 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}, i < 10$;

第三步, $i = 3, S = 0 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}, i < 10$; ……; 第十步, $i = 10, S = 0 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}$

$+\dots+\frac{1}{10\times 11}$, $i=10$ 不符合 $i>10$, 继续循环, $i=11$, $S=0+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\dots+\frac{1}{10\times 11}$
 $+\frac{1}{11\times 12}$, $i>10$, 跳出循环, 输出 $S=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\dots+\frac{1}{11\times 12}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$
 $=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$, \therefore 选 C.

8. 【答案】B

【命题意图】考查三角函数的求值.

【解析】 $\because \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)=-\frac{4}{5}$, $\therefore \cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$.

$\therefore \cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\frac{4}{5}$, 又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, 而 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\therefore \sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\therefore \tan\alpha=-3$.

$\therefore \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}$, \therefore 选 B.

9. 【答案】D

【命题意图】考查函数的周期性, 奇偶性, 单调性以及对数的运算.

【解析】 $\because f(x+2)=f(x)$, $\therefore f(x)$ 的周期为 2, 而当 $x\in[0, 1]$ 时, $f(x)=2^x+1$ 为增函数,

$\therefore f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数,

$\therefore a=f(\log_{0.5}6)=f(-\log_26)=f(\log_26)=f(\log_26-2)=f(\log_2\frac{3}{2})$,

$b=f(\log_27)=f(\log_27-2)=f(\log_2\frac{7}{4})$, $c=f(8)=f(4\times 2+0)=f(0)$,

$0<\log_2\frac{3}{2}<\log_2\frac{7}{4}<1\Rightarrow c<a<b$, \therefore 选 D.

10. 【答案】C

【命题意图】考查等差数列前 n 项和公式以及恒等问题.

【解析】 $\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{4a_1n+\frac{4n(4n-1)d}{2}}{2a_1n+\frac{2n(2n-1)d}{2}}=\lambda\Rightarrow\frac{8a_1n+4n(4n-1)d}{4a_1n+2n(2n-1)d}=\lambda\Rightarrow 8a_1n+4n(4n-1)d=\lambda[4a_1n+$

$2n(2n-1)d]$,

$\therefore 8dn^2+(4a_1-2d)n=2d\lambda n^2+(2\lambda a_1-\lambda d)n$.

$\therefore \begin{cases} 8d=2d\lambda, \\ 4a_1-2d=2\lambda a_1-\lambda d, \end{cases}$ 由 $8d=2d\lambda\Rightarrow d(\lambda-4)=0\Rightarrow d=0$ 或 $\lambda=4$.

当 $d=0$ 时, 代入 $4a_1-2d=2\lambda a_1-\lambda d$ 得 $\lambda=2$.

当 $\lambda=4$ 时, 代入 $4a_1-2d=2\lambda a_1-\lambda d$ 得 $d=2a_1$ (显然 $d\neq 0$), 满足题意,

$\therefore \lambda=2$ 或 4 , \therefore 选 C.

11. 【答案】C

【命题意图】考查利用导数研究函数的单调性以及转化运算能力.

【解析】设 $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, 则 $f'(x)=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}$,

令 $g(x)=\sin x-x\cos x$, 则 $g'(x)=x\sin x$.

当 $x\in(0, \pi)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上为增函数.

$\therefore g(x)>g(0)=0$.

又 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \subset (0, \pi)$, \therefore 当 $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 时, $g(x) > 0$.
 $\therefore f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 上为增函数,
 $\therefore f(\frac{\pi}{6}) < f(x) < f(\frac{5\pi}{6})$, 即 $m \leq f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{3}$, $n \geq f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{3}$.
 $\therefore n - m$ 的最小值为 $\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$, \therefore 选 C.

12. 【答案】B

【命题意图】考查椭圆的定义, 离心率以及正余弦定理.

【解析】方法一 由正弦定理得 $\frac{2c}{\sin 60^\circ} = 2R$, $R = \frac{2\sqrt{3}c}{3}$.

设 $|PF_1| = m$, $|PF_2| = n$, 则 $m + n = 2a$. 又 $4c^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos 60^\circ = (m+n)^2 - 3mn$,

所以 $mn = \frac{4}{3}(a^2 - c^2)$, $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 - c^2)$.

又 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot 2cr + \frac{1}{2}mr + \frac{1}{2}nr = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 - c^2) \Rightarrow (c+a)r = \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 - c^2)$,

$\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-c)$. 由 $R = 4r$ 得 $\frac{2\sqrt{3}c}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}(a-c)$, $\therefore \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. \therefore 选 B.

方法二 由正弦定理得 $\frac{2c}{\sin 60^\circ} = 2R$, $\frac{4c}{\sqrt{3}} = 2R$, $R = \frac{2\sqrt{3}c}{3}$,

$\therefore S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2cr + \frac{1}{2}mr + \frac{1}{2}nr$, 其中 $\theta = \angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = a^2 - c^2$,

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 - c^2) = \frac{1}{2}(2a+2c)r$, 即 $r = \frac{\sqrt{3}}{3}(a-c)$, $\therefore R = 4r$, $\therefore \frac{2\sqrt{3}c}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}(a-c)$.

$\therefore \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. \therefore 选 B.

二、填空题

13. 【答案】 $\sqrt{7}$

【命题意图】考查平面向量的数量积和模的运算.

【解析】 $\therefore |3a+b|^2 = 9a^2 + b^2 + 6a \cdot b = 9+1+6\cos \frac{2\pi}{3} = 7$, $\therefore |3a+b| = \sqrt{7}$.

14. 【答案】 $\frac{8}{3}$

【命题意图】考查等比数列性质, 前 n 项和公式的应用.

【解析】 $\therefore a_3 a_{11} = 2a_8^2$, $\therefore a_7^2 = 2a_8^2$, $\therefore \frac{a_7^2}{a_8^2} = 2$, $\therefore q^4 = 2$,

$\therefore S_4 + S_{12} = \lambda S_8$, $\therefore \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} = \lambda \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}$, $\therefore 1-2+1-2^3 = \lambda(1-2^2)$,

$\therefore \lambda = \frac{8}{3}$.

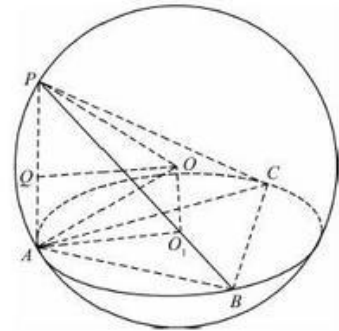
15. 【答案】 $\sqrt{6}$

【命题意图】考查三视图, 球的有关知识以及空间想象能力.

【解析】如图所示, 设该几何体外接球的半径为 R , 该几何体底面 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r ,

则 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Rightarrow R = 3$, $2r = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$,

$\therefore r=1$,
 \because 球心在线段 PA 的中垂线上, 设 $PA=h$, 由图知, 在 $\text{Rt}\triangle PQO$ 中,
 $(\frac{h}{2})^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow h=4\sqrt{2}$, $\therefore V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{3})^2 \sin 60^\circ \cdot 4\sqrt{2} = \sqrt{6}$.



16. 【答案】 $-\frac{1}{2} < a < 0$

【命题意图】考查函数极值, 导数的运算, 曲线的切线以及转化能力.

【解析】方法一 $\because f(x) = ax^2 + x \ln x$,

$\therefore f'(x) = 2ax + \ln x + 1 (x > 0)$.

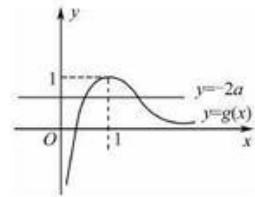
依题意 $2ax + \ln x + 1 = 0$ 有 2 个正根, 即 $-2a = \frac{1 + \ln x}{x}$, 令 $g(x)$

$= \frac{1 + \ln x}{x}$, $g'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ 为增函数,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ 为减函数, $\therefore g(x) \leq g(1) = 1$.

如图, 由 $g(x)$ 的图象知, $0 < -2a < 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 0$.



方法二 $f(x) = ax^2 + x \ln x \Rightarrow f'(x) = 2ax + \ln x + 1 (x > 0)$, 依题意

$2ax + \ln x + 1 = 0$ 有 2 个正根, 即 $\ln x = -2ax - 1$, 设直线 $y = -2ax - 1$ 与 $y = \ln x$ 相切时切点为 $P(x_0, \ln x_0)$,

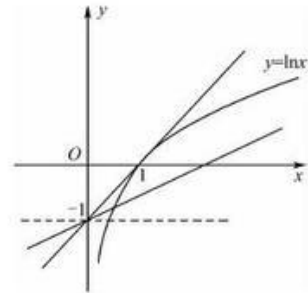
$y = \ln x$ 的导函数 $y' = \frac{1}{x}$, 过点 P 的切线为 $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$,

过点 $Q(0, -1)$.

$\therefore -1 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0) \Rightarrow x_0 = 1$, 所以切点为 $P(1, 0)$,

故点 $P(1, 0)$ 与点 $Q(0, -1)$ 连线的斜率为 $\frac{0+1}{1-0} = 1$.

由图知 $0 < -2a < 1$, $\therefore -\frac{1}{2} < a < 0$.



三、解答题

17. 【命题意图】考查三角函数和差倍公式的应用, 三角函数图象的变换, 解三角形以及均值不等式.

(1) $\because g(x) = 4\sin(x - \frac{\pi}{6})\cos x$,

$\therefore g(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\cos^2 x$, (2分)

$\therefore g(x) = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 1 = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) - 1$, (5分)

$\therefore g(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (6分)

(2) $f(x) = 2\sin[2(x + \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{6}] - 1 = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) - 1$, (7分)

$f(B) = 2\sin(2B + \frac{\pi}{6}) - 1 = -3 \Rightarrow \sin(2B + \frac{\pi}{6}) = -1$, (8分)

$\therefore 2B + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6})$,

$\therefore 2B + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow B = \frac{2\pi}{3}$ (9分)

由余弦定理得 $3^2 = a^2 + c^2 - 2accos \frac{2\pi}{3} \rightarrow a^2 + c^2 + ac = 9$,
 $9 = a^2 + c^2 + ac \geq 2ac + ac = 3ac$, 即 $ac \leq 3$, 当且仅当 $a=c$ 时取等号. (11分)

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin \frac{2\pi}{3} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$,
 $\therefore \triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (12分)

18. 【命题意图】考查概率统计的基本知识和基本方法以及运用所学知识解决实际生活中的问题的能力.
 (1)

	小于 45 岁	不小于 45 岁	合计
“有习惯”的人数	52	18	70
“无习惯”的人数	8	22	30
合计	60	40	100

..... (2分)

$K^2 = \frac{100 \times (52 \times 22 - 18 \times 8)^2}{70 \times 30 \times 60 \times 40} \approx 19.84 > 10.828$ (5分)

所以有 99.9% 的把握认为“有习惯”的人与年龄有关. (6分)

(2)依题意,

有 $11 \times \frac{70}{100} \times \frac{m}{30-10} \times 30 = 69.3$, (9分)

$\therefore m = 6$ (10分)

$\therefore 11 \times \frac{70}{100} \times \frac{6}{25-10} \times 25 = 77$ (万元). (11分)

估计新影片上映票房能达到 77 万元. (12分)

19. 【命题意图】考查空间线面平行,线面垂直,多面体的侧面积,考查学生空间想象能力以及逻辑推理能力.

(1)如图,取 BC 中点 P,连接 MP, C₁P.

$\because M$ 为 AB 的中点, $\therefore MP \parallel AC$ 且 $MP = \frac{1}{2}AC$ (1分)

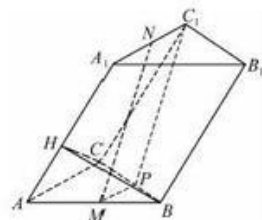
又 $AC \parallel A_1C_1, AC = A_1C_1$, 且 $NC_1 = \frac{1}{2}A_1C_1$,

$\therefore NC_1 \parallel MP$ 且 $NC_1 = MP$ (2分)

\therefore 四边形 MNC_1P 为平行四边形, $\therefore NM \parallel PC_1$ (3分)

又 $PC_1 \subset$ 平面 $BCC_1B_1, MN \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

$\therefore MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 (4分)



(2)如图,作 $BH \perp A_1A$ 交 AA_1 于 H,连接 CH.

$\because AC = AB, \angle A_1AB = \angle A_1AC, AH$ 为公共边,

$\therefore \triangle ABH \cong \triangle ACH \Rightarrow \angle CHA = \angle BHA$.

即 $BH \perp AA_1, CH \perp AA_1$ (6分)

而 $BH \cap CH = H, \therefore A_1A \perp$ 平面 $BCH, A_1A \perp BC$.

又 $A_1A \parallel C_1C, \therefore C_1C \perp BC$ (8分)

在直角三角形 C_1CP 中, $CP = \frac{1}{2}BC = 1, C_1P = MN = \sqrt{17}$,

$\therefore C_1C = \sqrt{17-1^2} = 4$ (10分)

在直角三角形 ABH 中, $BH=AB\sin 60^\circ=\sqrt{3}$ (11分)

\therefore 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积 $S=4\times\sqrt{3}\times 2+4\times 2=8+8\sqrt{3}$ (12分)

20. 【命题意图】考查抛物线方程, 性质, 向量的坐标运算, 考查学生逻辑推理能力和运算能力.

(1) 设 $A(\frac{y_0^2}{4}, y_0), B(\frac{y_1^2}{4}, y_1), C(\frac{y_2^2}{4}, y_2), F(1, 0)$, (1分)

$$FA=(\frac{y_0^2}{4}-1, y_0), FB=(\frac{y_1^2}{4}-1, y_1), FC=(\frac{y_2^2}{4}-1, y_2),$$

$$\because FB+FC=FA, \therefore \begin{cases} \frac{y_1^2}{4}-1+\frac{y_2^2}{4}-1=\frac{y_0^2}{4}-1, \\ y_1+y_2=y_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^2+y_2^2=y_0^2+4, \\ y_1+y_2=y_0, \end{cases}$$

..... (3分)

$$\therefore (y_1+y_2)^2=y_0^2 \Rightarrow y_1^2+y_2^2+2y_1y_2=y_0^2,$$

$$\therefore y_0^2+4+2y_1y_2=y_0^2 \Rightarrow y_1y_2=-2. \quad \text{..... (5分)}$$

(2) 方法一 $AB=(\frac{y_1^2-y_0^2}{4}, y_1-y_0), AC=(\frac{y_2^2-y_0^2}{4}, y_2-y_0)$,
..... (7分)

$$\lambda=AB \cdot AC=\frac{(y_1^2-y_0^2)(y_2^2-y_0^2)}{16}+(y_1-y_0)(y_2-y_0)$$

$$=\frac{(y_1-y_0)(y_2-y_0)}{16}[(y_1+y_0)(y_2+y_0)+16]$$

$$=\frac{y_1y_2-y_0(y_1+y_2)+y_0^2}{16}[y_1y_2+y_0(y_1+y_2)+y_0^2+16],$$

..... (10分)

$$\lambda=\frac{-2-y_0^2+y_0^2}{16}(-2+y_0^2+y_0^2+16)=-\frac{1}{4}y_0^2-\frac{7}{4}\leq-\frac{7}{4},$$

故 λ 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{7}{4}]$ (12分)

方法二 由 $FB+FC=FA$ 得四边形 $ABFC$ 为平行四边形,

$$\text{故 } \lambda=AB \cdot AC=CF \cdot BF=(1-\frac{y_1^2}{4})(1-\frac{y_2^2}{4})+(-y_1)(-y_2)=1-(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4})+\frac{y_1y_2}{16}+y_1y_2$$

$$=1-\frac{y_0^2+4}{4}+\frac{4}{16}-2=-\frac{1}{4}y_0^2-\frac{7}{4}\leq-\frac{7}{4},$$

故 λ 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{7}{4}]$.

21. 【命题意图】考查学生运用导数工具解决函数有关问题以及分类讨论思想.

$$(1) y=1-\frac{ae^x}{x^2}, y'=-\frac{ax^2e^x-2axe^x}{x^4}=-\frac{a(x-2)e^x}{x^3}, \quad \text{..... (1分)}$$

$$-\frac{a(x-2)e^x}{x^3}>0 \Leftrightarrow \frac{a(x-2)}{x}<0.$$

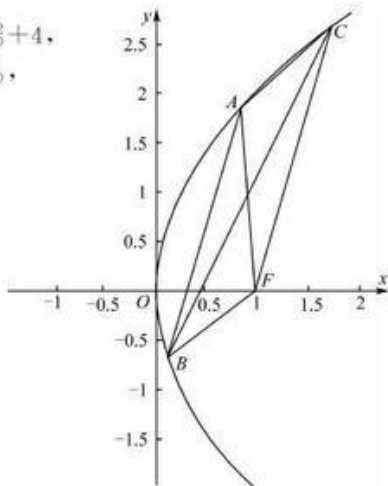
① 当 $a>0$ 时,

$$\frac{a(x-2)}{x}<0 \Rightarrow \frac{x-2}{x}<0 \Rightarrow 0<x<2; \quad \text{..... (2分)}$$

② 当 $a<0$ 时,

$$\frac{a(x-2)}{x}<0 \Rightarrow \frac{x-2}{x}>0 \Rightarrow x<0 \text{ 或 } x>2. \quad \text{..... (3分)}$$

综上: ① 当 $a>0$ 时, 函数 $y=\frac{f(x)}{x}$ 的增区间为 $(0, 2)$, 减区间为 $(-\infty, 0), (2, +\infty)$;



②当 $a < 0$ 时, 函数 $y = \frac{f(x)}{x}$ 的增区间为 $(-\infty, 0), (2, +\infty)$, 减区间为 $(0, 2)$. …… (4分)

(2) 当 $0 < x_1 < x_2$ 时,

$$f(x_1) - f(x_2) > \frac{m(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} \Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > \frac{m}{x_1} - \frac{m}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) - \frac{m}{x_1} > f(x_2) - \frac{m}{x_2},$$

即函数 $g(x) = f(x) - \frac{m}{x} = x - \frac{1}{e} \cdot \frac{e^x}{x} - \frac{m}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, …… (6分)

$$g'(x) = 1 - \frac{x e^x - e^x}{e^{2x}} + \frac{m}{x^2} = \frac{e x^2 - (x-1)e^x + em}{e^{2x}} \leq 0,$$

$$em \leq (x-1)e^x - e x^2, \dots\dots\dots (7分)$$

$$\text{令 } h(x) = (x-1)e^x - e x^2,$$

$$h'(x) = e^x + (x-1)e^x - 2ex = x e^x - 2ex = x(e^x - 2e) = 0 \Rightarrow e^x = 2e \Rightarrow x = \ln 2e. \dots\dots\dots (9分)$$

当 $x \in (0, \ln 2e)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 为减函数;

当 $x \in (\ln 2e, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数.

$$h(x) \text{ 的最小值为 } h(\ln 2e) = (\ln 2e - 1) \cdot e^{\ln 2e} - e \ln^2 2e = 2e \ln 2 - e(\ln 2 + 1)^2 = -e \ln^2 2 - e.$$

$$\therefore em \leq -e \ln^2 2 - e \Rightarrow m \leq -1 - \ln^2 2,$$

所以 m 的取值范围是 $(-\infty, -1 - \ln^2 2]$. …… (12分)

22. 【命题意图】考查极坐标与直角坐标的互化, 参数方程的应用.

$$(1) \rho^2 - 4\rho \sin \theta + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0,$$

$$\text{即 } C_2: x^2 + (y-2)^2 = 1 \dots\dots\dots (5分)$$

(2) 圆心 $C_2(0, 2)$, $P(2\cos\theta, \sin\theta)$,

$$|C_2 P| = \sqrt{(2\cos\theta)^2 + (\sin\theta - 2)^2} = \sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta - 4\sin\theta + 4} = \sqrt{-3\sin^2\theta - 4\sin\theta + 8}$$

$$= \sqrt{-3\left(\sin\theta + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{28}{3}}. \dots\dots\dots (8分)$$

$$\text{当 } \sin\theta = -\frac{2}{3} \text{ 时, } |C_2 P| \text{ 的最大值为 } \frac{2\sqrt{21}}{3}, \dots\dots\dots (9分)$$

$$\text{故 } |PQ| \text{ 的最大值为 } \frac{2\sqrt{21}}{3} + 1. \dots\dots\dots (10分)$$

23. 【命题意图】考查绝对值不等式的证明和解法.

$$(1) f(a^2) + f(a+a^2) = |a-2| + |a-1| \geq |(a-2) - (a-1)| = 1. \dots\dots\dots (5分)$$

$$(2) \left| \frac{1}{a}x - 2 \right| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \frac{1}{a}x - 2 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{a}x \leq 5. \dots\dots\dots (7分)$$

$$\therefore A \subseteq [-2, 10],$$

① 当 $a > 0$ 时, $A = \{x \mid -a \leq x \leq 5a\}$,

$$\text{则 } \begin{cases} -2 \leq -a, \\ 5a \leq 10 \end{cases} \Rightarrow a \leq 2. \text{ 即 } 0 < a \leq 2. \dots\dots\dots (8分)$$

② 当 $a < 0$ 时, $A = \{x \mid 5a \leq x \leq -a\}$,

$$\text{则 } \begin{cases} -2 \leq 5a, \\ -a \leq 10 \end{cases} \Rightarrow a \geq -\frac{2}{5}, \text{ 即 } -\frac{2}{5} \leq a < 0. \dots\dots\dots (9分)$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[-\frac{2}{5}, 0) \cup (0, 2]$. …… (10分)