

## 2021 学年高三上学期 8 月省实、广雅、执信、六中四校联考试卷

### 数学

命题学校：广东广雅中学

本试卷共 22 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题卡前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的校名、姓名、考号、座位号等相关信息填写在答题卡指定区域内。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案；不能答在试卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{x \mid |x-2| < 2\}$ ,  $B = \{2,3,4\}$ , 则  $A \cap B = ( \quad )$

- A.  $\{2\}$                       B.  $\{2,3\}$                       C.  $\{3,4\}$                       D.  $\{2,3,4\}$

2. 已知  $z = 3 + 4i$ , 则  $\frac{\bar{z}}{z-3} = ( \quad )$

- A.  $1 + \frac{3}{4}i$                       B.  $1 - \frac{3}{4}i$                       C.  $-1 + \frac{3}{4}i$                       D.  $-1 - \frac{3}{4}i$

3. 函数  $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{6})$  具有性质 ( )

- A. 最大值为 2, 图象关于  $(-\frac{\pi}{6}, 0)$  对称                      B. 最大值为  $\sqrt{2}$ , 图象关于  $(-\frac{\pi}{6}, 0)$  对称  
C. 最大值为 2, 图象关于直线  $x = \frac{\pi}{6}$  对称                      D. 最大值为  $\sqrt{2}$ , 图象关于直线  $x = \frac{\pi}{6}$  对称

4. 一个圆柱的侧面展开图是一个面积为  $4\pi^2$  的正方形, 则这个圆柱的体积为 ( )

- A.  $\pi$                       B.  $2\pi$                       C.  $\pi^2$                       D.  $2\pi^2$

5. 已知  $\sin(\frac{\pi}{5} - \alpha) = \frac{1}{4}$ , 则  $\cos(2\alpha + \frac{3\pi}{5}) = ( \quad )$

- A.  $-\frac{7}{8}$                       B.  $\frac{7}{8}$                       C.  $-\frac{\sqrt{15}}{8}$                       D.  $\frac{\sqrt{15}}{8}$

6. 已知函数  $y = \log_a(x-1) + 1$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ) 的图象恒过定点  $A$ , 若点  $A$  在椭圆  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$  上,

则  $m+n$  的最小值为 ( )

- A. 12                      B. 10                      C. 9                      D. 8

7. 2020 年新冠肺炎疫情肆虐, 全国各地千千万万的医护者成为“最美逆行者”, 医药科研工作者积极研制有效抗疫药物, 中医药通过临床筛选出的有效方剂“三药三方”(“三药”是指金花清感颗粒、连花清瘟颗粒(胶囊)和血必净注射液; “三方”是指清肺排毒汤、化湿败毒方和宣肺败毒方)发挥了重要的作用. 甲因个人原因不能选用血必净注射液, 甲、乙两名患者各自独立自主的选择一药一方进行治疗, 则两人选取药方完全不同的概率是 ( )

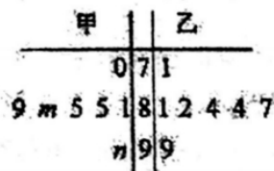
- A.  $\frac{4}{9}$                       B.  $\frac{8}{27}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{5}{9}$

8. 已知点  $Q$  在圆  $E: (x+3)^2 + (y-4)^2 = 4$  上, 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 点  $P$  在椭圆  $C$  上, 且圆  $E$  上的所有点均在椭圆  $C$  外, 若  $|PQ| - |PF|$  的最小值为  $2\sqrt{5} - 6$ , 且椭圆  $C$  的长轴长恰与圆  $E$  的直径长相等, 过点  $F$  作圆  $E$  的切线, 则切线斜率为 ( )

- A.  $\pm 2$                       B.  $\frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$                       C.  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$                       D.  $\pm \sqrt{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 如图是 2021 年青年歌手大奖赛中, 七位评委为甲、乙 两名选手打出的分数的茎叶图 (其中  $m, n$  均为数字 0~9 中的一个), 在去掉一个最高分和一个最低分后, 则有 ( )

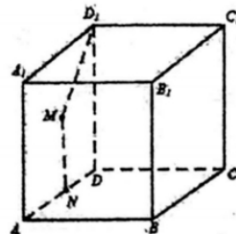


- A. 甲选手得分的平均数一定大于乙选手得分的平均数  
B. 甲选手得分的中位数一定大于乙选手得分的中位数  
C. 甲选手得分的众数与  $m$  的值无关  
D. 甲选手得分的方差与  $n$  的值无关

10. 已知向量  $\vec{a} = (1, \sin \theta)$ ,  $\vec{b} = (\cos \theta, \sqrt{2})$ , 则下列命题正确的是 ( )

- A. 存在  $\theta$ , 使得  $\vec{a} \parallel \vec{b}$                       B. 当  $\tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  时,  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  垂直  
C. 对任意  $\theta$ , 都有  $|\vec{a}| \neq |\vec{b}|$                       D. 当  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\sqrt{3}$  时,  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  方向上的投影为  $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

11. 如图, 点  $M$  是正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中的侧面  $ADD_1A_1$  内 (包括边界) 的一个动点, 则下列结论正确的是 ( )



- A. 满足  $BM \perp A_1D$  的点  $M$  的轨迹是一条线段  
B. 在线段  $AD_1$  上存在点  $M$ , 使异面直线  $B_1M$  与  $CD$  所成的角是  $30^\circ$   
C. 若正方体的棱长为 1, 三棱锥  $B - C_1MD$  的体积最大值为  $\frac{1}{3}$   
D. 点  $M$  存在无数个位置满足到直线  $AD$  和直线  $C_1D_1$  的距离相等

12. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq m \\ -(x+2)^2, & x < m \end{cases} (m \in R)$ , 则 ( )

- A. 对任意的  $m \in R$ , 函数  $f(x)$  都有零点.  
 B. 当  $m \leq -3$  时, 对  $\forall x_1 \neq x_2$ , 都有  $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$  成立.  
 C. 当  $m = 0$  时, 方程  $f[f(x)] = 0$  有 4 个不同的实数根.  
 D. 当  $m = 0$  时, 方程  $f(x) + f(-x) = 0$  有 2 个不同的实数根.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$  的一条渐近线为  $\sqrt{3}x + my = 0$ , 则双曲线  $C$  的实轴长为\_\_\_\_\_.

14. 已知二项式  $(2x\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$  的展开式的二项式系数和为 64, 则展开式中的有理项系数和为\_\_\_\_\_.

15. 函数  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$  的图象在点  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  处的切线与直线  $x - ay + 1 = 0$  垂直, 则非零实数  $a$  的值为\_\_\_\_\_.

16. 设正整数  $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + a_k \cdot 2^k$ , 其中  $a_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, 2, \dots, k$ , 记  $\omega(n) = a_0 + a_1 + \dots + a_k$ . 若  $m = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \dots + a_9 \cdot 2^9 + 2^{10}$  且  $\omega(m) = 3$ , 则这样的正整数  $m$  有\_\_\_\_\_个, 所有的这样的正整数  $m$  的和为\_\_\_\_\_.(用数字作答)

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知等比数列  $\{a_n\}$  是递增数列, 满足  $a_4 = 32, a_3 + a_5 = 80$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \log_2 a_n$ , 若  $b_n$  为数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项积, 证明  $\frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n} = 1$ .

18. 党中央, 国务院高度重视新冠病毒核酸检测工作, 中央应对新型冠状病毒感染肺炎疫情工作领导小组会议作出部署, 要求尽力扩大核酸检测范围, 着力提升检测能力. 根据统计发现, 疑似病例核酸检测呈阳性的概率为  $p (0 < p < 1)$ . 现有 6 例疑似病例, 分别对其取样、检测, 既可以逐个化验, 也可以将若干个样本混合在一起化验, 混合样本中只要有病毒, 则化验结果呈阳性. 若混合样本呈阳性, 则需将该组中备用的样本再逐个化验; 若混合样本呈阴性, 则判定该组各个样本均为阴性, 无需再化验. 现有以下三种方案: 方案一: 6 个样本逐个化验; 方案二: 6 个样本混合在一起化验; 方案三: 6 个样本均分为两组, 分别混合在一起化验. 在新冠肺炎爆发初期, 由于检测能力不足, 化验次数的期望值越小, 则方案越“优”.

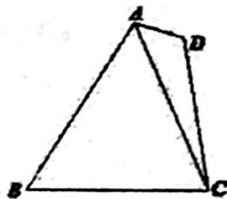
(1) 若  $p = \frac{1}{3}$ , 按方案一, 求 6 例疑似病例中至少有 1 例呈阳性的概率;

(2) 若  $t = (1-p)^3$ , 现将该 6 例疑似病例样本进行化验, 当方案三比方案二更“优”时, 求  $t$  的取值范围.



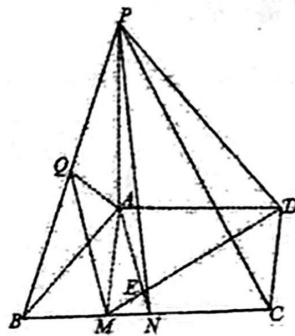
19. 如图所示, 在四边形  $ABCD$  中,  $\angle D = 2\angle B$ , 且  $AD = 1$ ,  $CD = 3$ ,  $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

- (1) 若  $BC = \sqrt{6}$ , 求  $AB$  的长;  
(2) 求四边形  $ABCD$  面积的最大值.



20. 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AD \parallel BC$ ,  $BC \perp CD$ ,  $PA = AD = 2$ ,  $BC = 3CD = 3$ , 点  $M, N$  在线段  $BC$  上, 满足  $BM = 2MN = 1$ ,  $AN \cap MD = E$ .

- (1) 求证:  $PN \perp MD$ ;  
(2) 若  $Q$  为线段  $PB$  上的一点, 且  $PD \parallel$  平面  $AQM$ , 求平面  $QAM$  与平面  $PAN$  所成锐二面角的余弦值.



21. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ,  $M(n, 2)$  为抛物线  $C$  上的一点, 且  $|MF| = 2$ .

- (1) 求抛物线  $C$  的标准方程;  
(2) 过点  $F$  的直线  $m$  与抛物线  $C$  交于  $A, B$  两点, 点  $P$  在抛物线  $C$  上, 记直线  $PA$  的斜率为  $k_1$ , 直线  $PB$  的斜率为  $k_2$ , 试判断是否存在点  $P$ , 使得  $k_1 + k_2 = 2$ ? 若存在, 求出点  $P$  的个数; 若不存在, 请说明理由.

22. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2ax + \ln x$

(1) 若函数  $f(x)$  为增函数, 求实数  $a$  的取值范围

(2) 设  $g(x) = xf(x) - \frac{1}{2}x^3 + 2x$  有两个不同零点  $x_1, x_2$

i) 证明:  $x_1 + x_2 > \frac{1}{a}$

第4页, 共5页

ii) 若  $x_2 - 3x_1 > 0$ , 证明:  $x_1 + x_2 > \frac{6}{e^2}$

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》