

## 高二文科数学

考生注意：本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟。请将答案填写在答题卡相对应的位置。

## 第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知  $i$  是虚数单位，则  $\frac{2i}{1+i}$  等于

- A.  $1+i$                       B.  $1-i$                       C.  $-1-i$                       D.  $-1+i$

2. 如图是一个结构图，在框①中应填入



- A. 空集                      B. 补集                      C. 子集                      D. 全集

3. 观察下列数的规律：1, 1, 2, 3, 5, 8, ……，则第 9 个数是

- A. 21                      B. 22                      C. 33                      D. 34

4. 用分析法证明：要使①  $A > B$ ，只需②  $C < D$ ，这里①是②的

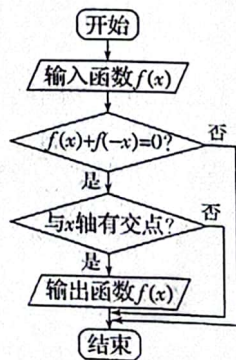
- A. 充分条件                      B. 必要条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

5. 在建立两个变量  $y$  与  $x$  的回归模型中，分别选择了 4 个不同的模型，结合它们的相关指数  $R^2$  判断，其中拟合效果最好的为

- A. 模型 1 的相关指数  $R^2$  为 0.3                      B. 模型 2 的相关指数  $R^2$  为 0.25  
C. 模型 3 的相关指数  $R^2$  为 0.7                      D. 模型 4 的相关指数  $R^2$  为 0.85

6. 某程序框图如图所示，现输入如下四个函数，则可以输出的函数是

- A.  $f(x) = \frac{|x|}{x}$   
B.  $f(x) = \frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}$   
C.  $f(x) = \lg \sin x$   
D.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



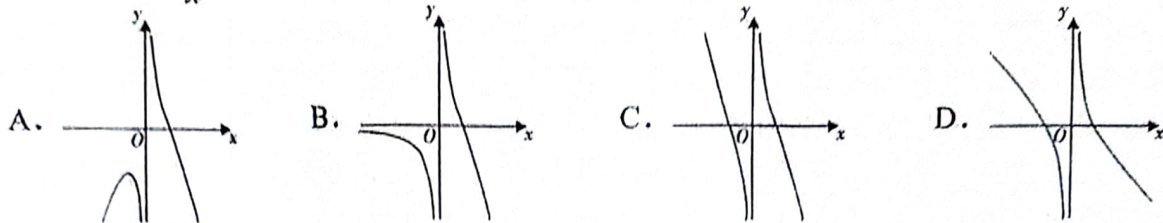
7. 动点  $P(x, y)$  到点  $F(3, 0)$  的距离比它到直线  $x+2=0$  的距离大 1，则动点  $P$  的轨迹是

- A. 椭圆                      B. 双曲线                      C. 双曲线的一支                      D. 抛物线

8. 设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率为  $\sqrt{7}$ , 则  $C$  的渐近线方程为

- A.  $y = \pm\sqrt{5}x$                       B.  $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$                       C.  $y = \pm\sqrt{6}x$                       D.  $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}x$

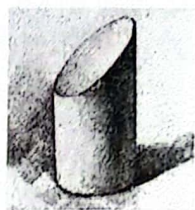
9. 函数  $y = \frac{1}{x} - x^2$  的图象大致是



10. 美学四大构件是: 史诗、音乐、造型 (绘画、建筑等) 和数学. 素描是学习绘画的必要一步, 它包括了明暗素描和结构素描, 而学习几何体结构素描是学习素描最重要的一步. 某同学在画“切面圆柱体” (用与圆柱底面不平行的平面去截圆柱, 底面与截面之间的部分叫做切面圆柱体) 的过程中, 发现“切面”是一个椭圆 (如图), 若“切面”所在平面与底面成  $60^\circ$  角, 则该椭圆的离心率为

- A.  $\frac{1}{2}$   
C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

- B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$   
D.  $\frac{1}{3}$



11. 某药厂为了了解某新药的的销售情况, 将 2023 年 2 至 6 月份的销售额整理如下:

月份	2	3	4	5	6
销售额 (万元)	19	25	35	37	42

根据 2 至 6 月份的数据可求得每月的销售额  $y$  关于月份  $x$  的线性回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  为

(参考公式及数据:  $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$ ,  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$ ,  $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 690$ ,  $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 90$ )

- A.  $\hat{y} = 5.8x + 8.4$                       B.  $\hat{y} = 8.4x + 5.8$   
C.  $\hat{y} = 6x - 9$                       D.  $\hat{y} = 4x + 31.6$

12. 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x} - mx$  ( $e$  为自然对数的底数), 若  $f(x) < 0$  在  $(0, +\infty)$  上有解, 则实数  $m$  的取值范围是

A.  $(e, +\infty)$

B.  $(-\infty, e)$

C.  $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$

D.  $\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right)$

## 第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \leq 1$ ”的否定是“\_\_\_\_\_”.14. 北京冬奥会短道速滑队组织甲、乙、丙等 6 名队员参加选拔赛, 已知比赛结果没有并列名次, 记“甲得第一名”为  $p$ , “乙得第一名”为  $q$ , “丙得第一名”为  $r$ , 若  $p \vee q$  是真命题,  $(\neg p) \vee r$  是真命题, 则得第一名的是\_\_\_\_\_.15. 已知曲线  $y = x^2 - 1$  在  $x = x_0$  点处的切线与曲线  $y = 1 - x^3$  在  $x = x_0$  点处的切线互相平行, 则  $x_0$  的值为\_\_\_\_\_.16. 设  $F_1, F_2$  为双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  的两个焦点, 点  $P$  在双曲线上, 且满足  $PF_1 \perp PF_2$ , 则  $\triangle F_1PF_2$  的面积是\_\_\_\_\_.

三、解答题 (本大题共 6 个小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 已知  $p: x^2 - 2mx + 4 = 0$  有两个不等的正根,  $q: x^2 + 2(m-2)x + 1 = 0$  无实根. 若  $p \wedge q$  为假,  $p \vee q$  为真, 求实数  $m$  的取值范围.18. (本小题满分 12 分) 已知复数  $z = \frac{2+4mi}{1-i}$  ( $m \in \mathbb{R}$ ,  $i$  是虚数单位).(1) 若  $z$  是纯虚数, 求  $m$  的值;(2) 设  $\bar{z}$  是  $z$  的共轭复数, 复数  $\bar{z} + 2z$  在复平面上对应的点在第一象限, 求  $m$  的取值范围.19. (本小题满分 12 分) 为了调查观众对电影“速度与激情 10”结局的满意程度, 研究人员在某电影院随机抽取了 1000 名观众作调查, 所得结果如表所示, 其中不喜欢“速度与激情 10”的结局的观众占被调查观众总数的  $\frac{3}{10}$ .

	男性观众	女性观众	总计
喜欢“速度与激情 10”的结局	400		
不喜欢“速度与激情 10”的结局		200	
总计			

(1) 完善上述  $2 \times 2$  列联表;

(2) 是否有 99.9% 的把握认为观众对电影“速度与激情 10”结局的满意程度与性别具有相关

性?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
$k$	2.706	3.841	6.635	10.828

20. (本小题满分 12 分) 双曲线与椭圆有许多优美的对称性质, 对于双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

( $a > 0, b > 0$ ), 有下列性质: 若  $AB$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 不平行于对

称轴且不过原点的弦,  $M$  为  $AB$  的中点,  $O$  为坐标原点, 则  $k_{OM} \cdot k_{AB} = \frac{b^2}{a^2}$  为定值, 椭圆

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 也有类似的性质. 若  $AB$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 不平行于对称

轴且不过原点的弦,  $M$  为  $AB$  的中点,  $O$  为坐标原点, 猜想  $k_{OM} \cdot k_{AB}$  的值, 并证明.

21. (本小题满分 12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1$  ( $a > \sqrt{3}$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 若直线  $l$  经过  $C$  的左焦点  $F_1$  且与  $C$  相交于  $B, D$  两点, 以线段  $BD$  为直径的圆经过椭圆  $C$  的右焦点  $F_2$ , 求  $l$  的方程.

22. (本小题满分 12 分) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 当  $x > 1$  时,  $\frac{1}{2}x^2 + \ln x < \frac{2}{3}x^3$  是否恒成立, 并说明理由.