泸州市高 2020 级第二次教学质量诊断性考试

数　学（理科）参考答案及评分意见

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	D	C	C	D	C	B	B	B	C	C

二、填空题：

13．1；　　14．$\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$ 中的任意一个值；　15．10π；

16．$\dfrac{4}{3}$．

三、解答题：

17．解：（Ⅰ）因为 $S_n=-\dfrac{3}{2}a_{n+1}+\dfrac{3}{2}$，　①

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=-\dfrac{3}{2}a_n+\dfrac{3}{2}$，　②……1 分

由①，②相减得：$a_n=-\dfrac{3}{2}a_{n+1}+\dfrac{3}{2}a_n$，……2 分

即 $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$，……3 分

在 $S_n=-\dfrac{3}{2}a_{n+1}+\dfrac{3}{2}$ 中令 $n=1$ 得，$S_1=-\dfrac{3}{2}a_2+\dfrac{3}{2}$，即 $a_2=\dfrac{1}{3}$，……4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=1$ 为首项，公比为 $\dfrac{1}{3}$ 的等比数列，……5 分

所以 $a_n=(\dfrac{1}{3})^{n-1}$；……6 分

（Ⅱ）若选①．因为 $b_n=a_n+2\log_{\frac{1}{3}}a_n+1$

$=(\dfrac{1}{3})^{n-1}+2\log_{\frac{1}{3}}(\dfrac{1}{3})^{n-1}+1$……7 分

$=(\dfrac{1}{3})^{n-1}+2n-1$……8 分

所以 $T_n=\dfrac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}+\dfrac{n(1+2n-1)}{2}$……10 分

$=\dfrac{3}{2}(1-\dfrac{1}{3^n})+n^2$．……12 分

若选②．$b_n=a_n^{\ 2}+n+1=(\dfrac{1}{3})^{2n-2}+n+1$……7 分

$=(\dfrac{1}{9})^{n-1}+n+1$……8 分

所以 $T_n=\dfrac{1-(\frac{1}{9})^n}{1-\frac{1}{9}}+\dfrac{n(2+n+1)}{2}$ ……………………………………………11 分

$=\dfrac{9}{8}(1-\dfrac{1}{3^n})+\dfrac{1}{2}(n^2+3n)$． ……………………………………………12 分

18．解：（Ⅰ）设“该考生报考甲大学恰好通过一门笔试科目”为事件 A，“该考生报考乙大学恰好通过一门笔试科目”为事件 B，根据题意得：

$P(A)=C_3^1(\dfrac{1}{2})^1(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{8}$， …………………………………………… 2 分

$P(B)=\dfrac{1}{6}\times(\dfrac{1}{3})^2+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times 2$ …………………………………………… 3 分

$=\dfrac{7}{18}$； ……………………………………………………………………4 分

（Ⅱ）设该考生报考甲大学通过的科目数为 X，报考乙大学通过的科目数为 Y，

根据题意可知，$X\sim B(3,\dfrac{1}{2})$，所以，$E(X)=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$， ………………… 5 分

$P(Y=0)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{3}(1-m)=\dfrac{5}{18}(1-m)$， ……………………………………… 6 分

$P(Y=1)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{3}(1-m)+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2}{3}(1-m)+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{3}m=\dfrac{11}{18}-\dfrac{1}{3}m$， ………………7 分

$P(Y=2)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{3}(1-m)+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{3}m+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{2}{3}m=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{2}m$， ……………………… 8 分

$P(Y)=3=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{3}m=\dfrac{1}{9}m$． ……………………………………………… 9 分

则随机变量 Y 的分布列为：

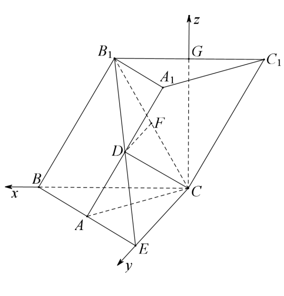
Y	0	1	2	3
P	$\frac{5}{18}(1-m)$	$\frac{11}{18}-\frac{1}{3}m$	$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}m$	$\frac{1}{9}m$

$E(Y)=\dfrac{11}{18}-\dfrac{1}{3}m+\dfrac{2}{9}+m+\dfrac{1}{3}m=\dfrac{5}{6}+m$， ……………………………………10 分

若该考生更希望通过乙大学的笔试时，有 $E(Y)>E(X)$， ……………………… 11 分

所以 $\dfrac{5}{6}+m>\dfrac{3}{2}$，又因为 $0<m<1$，所以 $\dfrac{2}{3}<m<1$，

所以 m 的取值范围是 $(\dfrac{2}{3},1)$． …………………………………… 12 分



19．证明：（Ⅰ）分别延长 B_1D，BA，设 $BA\cap B_1D=E$，连接 CE，……… 1 分

则 CE 即为平面 B_1CD 与平面 ABC 的交线 l， …………………2 分

因为 $DB_1=DC$，取 B_1C 中点 F，连接 DF， ………………… 3 分

所以 $DF\perp B_1C$，$DF\subset$ 平面 B_1CD，

因为平面 $B_1CD\perp$ 平面 BB_1C_1C，且交线为 B_1C，

所以 $DF \perp$ 平面 BB_1C_1C， ………………………………………………………………… 4 分

因为 D 为棱 A_1A 的中点， $A_1B_1 // AB$，

所以 D 为 B_1E 的中点，所以 $l // DF$， …………………………………………………… 5 分

所以 $l \perp$ 平面 BB_1C_1C； ………………………………………………………………… 6 分

方法一：（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $BA = AE$，因为 $\angle BAC = 90^\circ$， $AB = AC$，

所以 $\angle BCE = 90^\circ$，

在平面 BB_1C_1C 内过点 C 作 $GC \perp BC$，垂足为 G，则 $GC \perp$ 平面 BCE， ……………7 分

分别以 CB，CE，CG 所在直线为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

设 $BC = 2$，则 $B_1(1,0,\sqrt{3})$， $E(0,2,0)$， $B(2,0,0)$， ………………………………8 分

则 $\overrightarrow{CB_1} = (1,0,\sqrt{3})$， $\overrightarrow{CE} = (0,2,0)$， $\overrightarrow{BE} = (-2,2,0)$， $\overrightarrow{BB_1} = (-1,0,\sqrt{3})$， ………………9 分

设平面 B_1DC 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} x + \sqrt{3}z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$，取 $\boldsymbol{m} = (\sqrt{3},0,-1)$， ……………………………………………… 10 分

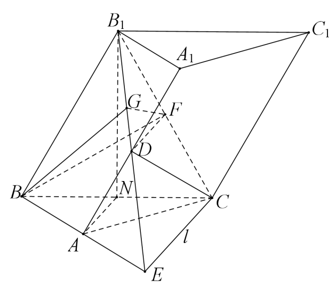
设平面 B_1DB 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$，取 $\boldsymbol{n} = (\sqrt{3},\sqrt{3},1)$， ………………………………………… 11 分

所以 $\cos < \boldsymbol{m},\boldsymbol{n} > = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

即二面角 $C - B_1D - B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$． ……………………………………………12 分

方法二：连接 BF，因为四边形 BB_1C_1C 为菱形，且 $\angle B_1BC = 60^\circ$，



所以 $BF \perp B_1C$， ……………………………………………7 分

$BF \subset$ 平面 B_1CB，

因为平面 $B_1CD \perp$ 平面 BB_1C_1C，且交线为 B_1C，

所以 $BF \perp$ 平面 B_1CD， ………………………………………8 分

过点 F 作 $FG \perp B_1E$，连接 BG，

所以 $BG \perp B_1E$，

故 $\angle BGF$ 为二面角 $C - B_1D - B$ 的平面角， ………………………………………9 分

在 $\mathbf{Rt}\triangle B_1DF$ 中， $B_1F = 1$， $DF = \dfrac{1}{2}CE = 1$， $FG \perp B_1E$，

所以 $FG = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ………………………………………………………………… 10 分

在 $\mathbf{Rt}\triangle BFG$ 中， $BF = \sqrt{3}$，所以 $BG = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$， ………………………………………… 11 分

所以 $\cos\angle BGF = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$，即二面角 $C - B_1D - B$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$． …………………… 12 分

20．解：（Ⅰ）因为 $P(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{1}{2})$ 在 C 上，所以 $\dfrac{3}{2a^2} + \dfrac{1}{4b^2} = 1$， ………………………………… 1 分

因为 C 的左焦点 $F\ (-1,0)$，所以 $a^2-b^2=1$，…………………………………………… 2 分

所以 $a^2=2$， $b^2=1$，

C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$； ……………………………………………………………… 4 分

（Ⅱ）①当直线 l 与 x 轴重合时，点 $A(-\sqrt{2},0)$， $B(\sqrt{2},0)$， $M(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

$N(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

$\overrightarrow{AM}=(\sqrt{2}-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$， $\overrightarrow{BN}=(-\sqrt{2}-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，所以 $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BN}=-\dfrac{3}{2}$， ……………… 5 分

②当直线 l 与 x 轴不重合时，设直线 l 的方程为 $x=my-1$，

代入 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 消去 x 得 $(m^2+2)y^2-2my-1=0$，

因为直线 l 与 C 交于点 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，所以 $y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+2}$， …………6 分

因为 $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BN}=(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FM})\bullet(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FN})=\overrightarrow{AF}\bullet\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FM}\bullet\overrightarrow{FN}$， ………………………… 7 分

所以 $\overrightarrow{AF}\bullet\overrightarrow{BF}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(1+m^2)y_1y_2=-\dfrac{m^2+1}{m^2+2}$， ……………………8 分

（1）当 $m\neq 0$ 时，同理可得 $\overrightarrow{FM}\bullet\overrightarrow{FN}=-\dfrac{(-\frac{1}{m})^2+1}{(-\frac{1}{m})^2+2}=-\dfrac{m^2+1}{2m^2+1}$， …………………9 分

$\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BN}=-\dfrac{m^2+1}{m^2+2}-\dfrac{m^2+1}{2m^2+1}$

$=-\dfrac{3(m^2+1)^2}{2m^4+5m^2+2}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2m^2+\frac{2}{m^2}+5}-1\right)$， ……………………………………… 10 分

因为 $m^2+\dfrac{1}{m^2}\geqslant 2$，

所以 $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BN}$ 的取值范围是 $(-\dfrac{3}{2},-\dfrac{4}{3}]$， ……………………………………………… 11 分

（2）当 $m=0$ 时， $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BN}=-\dfrac{3}{2}$，

综上知 $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BN}$ 的取值范围是 $[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{4}{3}]$. …………………………………… 12 分

21．解：（Ⅰ） $f'(x)=ae^x-1$， ………………………………………………………………………1 分

因为 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点，

所以 $f'(0)=ae^0-1=a-1=0$，得 $a=1$， ……………………………………………2 分

所以 $f'(x)=e^x-1$，

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单减，在 $(0,+\infty)$ 上单增， ………………………………… 3 分

所以当 $x=0$ 时， $f(x)$ 有最小值 $f(0)=e^0-2=-1$； …………………………4 分

方法一：（Ⅱ）因为 $g(x)=ae^x-\ln(x+2)+\ln a-2$，

所以 $g'(x)=ae^{x}-\dfrac{1}{x+2}$，则 $g'(x)$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单增，…………………………………5 分

记 $x_1=\max\{\ln\dfrac{1}{2a},0\}$，

当 $\ln\dfrac{1}{2a}>0$ 时，

$g'(x_1)=ae^{x_1}-\dfrac{1}{x_1+2}=ae^{\frac{1}{\ln 2a}}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{\ln 2a}+2}>ae^{\frac{1}{\ln 2a}}-\dfrac{1}{0+2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$，

当 $\ln\dfrac{1}{2a}<0$ 时，$g'(x_1)=ae^{x_1}-\dfrac{1}{x_1+2}=ae^{0}-\dfrac{1}{0+2}>ae^{\frac{1}{\ln 2a}}-\dfrac{1}{0+2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$，

则 $g'(x_1)=ae^{x_1}-\dfrac{1}{x_1+2}\geqslant ae^{\ln\frac{1}{2a}}-\dfrac{1}{0+2}=0$，…………………………………………6 分

记 $x_2=\min\{\dfrac{1}{a}-2,0\}$，

当 $\dfrac{1}{a}-2>0$ 时，

$g'(x_2)=ae^{x_2}-\dfrac{1}{x_2+2}\leqslant ae^{0}-\dfrac{1}{0+2}<ae^{0}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}-2+2}=0$；

当 $\dfrac{1}{a}-2<0$ 时，$g'(x_2)=ae^{x_2}-\dfrac{1}{x_2+2}\leqslant ae^{\frac{1}{a}-2}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}-2+2}<ae^{0}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}-2+2}=0$；

7 分

所以存在唯一的 $x_0\in(-2,+\infty)$，使得 $g'(x_0)=0$，

当 $-2<x<x_0$ 时，$g'(x_0)<0$；当 $x>x_0$ 时，$g'(x_0)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(-2,x_0)$ 上单减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单增，………………………………8 分

若函数 $g(x)$ 有两个零点，只需 $g(x_0)<0$，

即 $g(x_0)=ae^{x_0}-\ln(x_0+2)+\ln a-2<0$，

又 $ae^{x_0}-\dfrac{1}{x_0+2}=0$，即 $a=\dfrac{1}{e^{x_0}(x_0+2)}$，………………………………………………9 分

则 $x_0+2+2\ln(x_0+2)-\dfrac{1}{x_0+2}>0$，

设 $h(t)=t+2\ln t-\dfrac{1}{t}$，则 $h(t)$ 为增函数，$h(1)=0$，所以当 $t>1$时，$h(t)\geqslant 0$，

则 $x_0+2>1$，即 $x_0>-1$，……………………………………………………………………10 分

令 $\varphi(x)=e^{x}(x+2)(x>-1)$，$\varphi'(x)=e^{x}(x+3)>0$，

则 $\varphi(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单增，由 $x_0>-1$ 得 $\varphi(x_0)>\varphi(-1)=\dfrac{1}{e}$，……………………11 分

所以 $a=\dfrac{1}{e^{x_0}(x_0+2)}\in(0,e)$，

所以 a 的取值范围是 $(0,e)$．………………………………………………………………12 分

方法二：（Ⅱ）若 $g(x)=f(x)+x-\ln(x+2)$ 有两个零点，即 $e^{x+\ln a}+x+\ln a=\ln(x+2)+x+2$

有两个解，即 $e^{x+\ln a}+x+\ln a=\ln(x+2)+e^{\ln(x+2)}$ 有两个解，…………………………5 分

利用同构式，设函数 $h(x)=e^{x}+x$，…………………………………………………………6 分

问题等价于方程 $h(x+\ln a)=h(\ln(x+2))$ 有两个解，…………………………………7 分

$h'(x)=e^{x}+1>0$ 恒成立，即 $h(x)=e^{x}+x$ 单调递增，

所以 $x+\ln a=\ln(x+2)$，

问题等价于方程 $x+\ln a=\ln(x+2)$ 有两个解，………………………………………8 分

即 $\ln(x+2)-(x+2)+2-\ln a=0$ 有两个解，

设 $t=x+2$，$2-\ln a=m$，

即 $\ln t-t+m=0$ 有两个解，

令 $\varphi(t)=\ln t-t+m$，问题转化为函数 $\varphi(t)$ 有两个零点，…………………………9 分

因为 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-1$，当 $t\in(0,1)$ 时，$\varphi'(t)>0$，当 $t\in(1,+\infty)$ 时，

$\varphi'(t)<0$，

则 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上递增，在 $(1,+\infty)$ 上递减，……………………………………10 分

为了使 $\varphi(t)$ 有两个零点，只需 $\varphi(1)>0$，

解得 $m>1$，即 $2-\ln a>1$，解得 $0<a<e$，………………………………………11 分

由于 $\varphi(e^{-m})=2m-e^{-m}<0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内各有一个

零点.

综上知 a 的取值范围是 $(0,e)$．…………………………………………………………12 分

22．解：（Ⅰ）由 $\rho\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})-\sqrt{3}m=0$，得 $\rho(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{6})-\sqrt{3}m=0$，………1 分

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta-\dfrac{1}{2}\rho\cos\theta-\sqrt{3}m=0$，…………………………………………2 分

又 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，……………………………………………………3 分

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{1}{2}x-\sqrt{3}m=0$，………………………………………………4 分

即 l 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}m=0$；…………………………………5 分

（Ⅱ）曲线 C 的普通方程为：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，………………………………………6 分

直线 l 的参数方程为：$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=2m+\dfrac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），…………………………7 分

代入 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 整理得：$t^2+4mt+8m^2-2=0$，……………………………8 分

设 A，B 两点所对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1t_2=8m^2-2$，

因为 $|PA||PB|=\dfrac{3}{2}$，所以 $|t_1t_2|=|8m^2-2|=\dfrac{3}{2}$，即 $m^2=\dfrac{1}{16}$ 或 $m^2=\dfrac{7}{16}$，………9 分

因为$m^2=\frac{1}{16}$，或$m^2=\frac{7}{16}$，满足$\Delta=-16m^2+8>0$，

所以$m=\pm\frac{1}{4}$或$\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$．……………………………………………………………10 分

23．解：（Ⅰ）因为$f(x)=|x+2|+|x-m|$

$\geqslant|x+2-(x-m)|=|m+2|$，……………………………………………………………………1 分

若对$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 3$恒成立，则$|m+2|\geqslant 3$，…………………………………………2 分

所以$m\leqslant -5$，或$m\geqslant 1$，…………………………………………………………………………4 分

所以实数m的取值范围是$(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$；…………………………………………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$f(x)$的最小值为$|m+2|$，所以$|m+2|=5$，……………………………6 分

所以$m=3$或-7，因为$m>0$，所以$m=3$，

即$a+3b+4c=3$，……………………………………………………………………………………7 分

由柯西不等式得$(a^2+2ab+5b^2+c^2)(1^2+1^2+4^2)$

$=[(a+b)^2+(2b)^2+c^2](1^2+1^2+4^2)$…………………………………………………………8 分

$\geqslant[(a+b)\times 1+2b\times 1+c\times 4]^2$……………………………………………………………9 分

$=(a+3b+4c)^2=9$，

所以$a^2+2ab+5b^2+c^2\geqslant\frac{1}{2}$（当且仅当$a=\frac{1}{12}$，$b=\frac{1}{12}$，$c=\frac{2}{3}$时等号）．…………………………………………………………………………………………………10 分