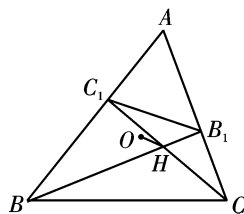


第五届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

1. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 满足 $AB > AC$, O 、 H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、垂心, 直线 BH 与 AC 交于点 B_1 , 直线 CH 与 AB 交于点 C_1 . 若 $OH \parallel B_1C_1$, 证明: $\cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$.



图

2. 设 $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ($n \geq 3$). 证明:

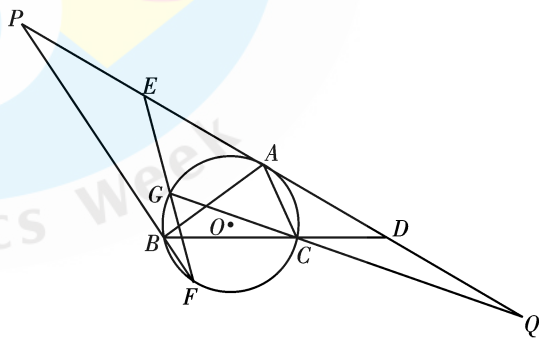
$$\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_2 x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_{n-2} x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_{n-1} x_n}{x_1} + \frac{x_n x_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

并给出等号成立的充分必要条件.

3. 证明: 空间直角坐标系第一卦限(x, y, z 坐标均大于 0) 中存在一个边长为 2 014 的立方体, 其内部恰有 2 014 个素点(x, y, z 三个坐标轴的坐标均为素数的格点).

4. 御天敌为了挽救塞伯坦星球, 在地球上建立了由 n ($n \geq 3$) 个能量柱组成的太空桥, 这些能量柱竖立在一个平面的 n 个点上, 任意三点不共线. 其启动方式为: 任意选定一个能量柱, 从其发出一道激光, 该能量柱将激光逆时针旋转, 当激光遇到另一个能量柱时, 停止旋转; 第二个能量柱接收到激光后, 将其反射并逆时针旋转, 当反射的激光遇到下一个能量柱时, 停止旋转; 如此下去, 若激光行进的路径组成一条有向环路, 则启动成功. 证明: 存在成功的启动方式, 且成功启动方式所对应的有向环路个数不大于 $2n$.

5. 如图, 锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$, 过点 A 作 $\odot O$ 的切线 l , l 与直线 BC 交于点 D , E 为 DA 延长线上一点, F 为劣弧 \widehat{BC} 上一点, 直线 EF 与劣弧 \widehat{AB} 交于点 G , 直线 FB 、 GC 分别与 l 交于点 P 、 Q . 证明: $AD = AE$ 的充分必要条件为 $AP = AQ$.



图

6. 已知对任意 $x, y, z \geq 0$ 有

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq c |(x-y)(y-z)(z-x)|.$$

求 c 的最大值.

7. 用 $r(n)$ 表示 n 被 $1, 2, \dots, n$ 除所得余数的和. 试求所有正整数 m ($1 < m \leq 2\,014$), 使得

$$r(m) = r(m-1).$$

8. n ($n \geq 3$) 个盒子围成一圈, 按逆时针方向依次放入 1 个球, 2 个球, \dots , n 个球, 然后进行如下操作: 选择三个相邻的盒子, 分别放入 1 个球或在此三个盒子均非空的前提下分别拿走 1 个球. 求所有的正整数 k , 使得可经过有限次操作, n 个盒子中均恰有 k 个球.

——答案请参考《中等数学》2014 年第 9 期