

赣州市 2022 ~ 2023 学年度第一学期期末考试 高三理科数学参考答案

一. 选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	C	B	B	C	D	B	D	C	A

12. 解: 由 $\frac{1}{10} = \frac{2}{20} > \frac{2}{21}$, 得 $b > c$, 由 $x-1 \geq \ln x$ 得 $\frac{1}{10} > \ln \frac{11}{10}$, 即 $b > a$,

当 $x \in (0, 1)$ 时 $x > \ln(x+1)$, 令 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{2+x}$, $x \in (0, 1)$,

则 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2+x)^2} = \frac{x^2+4x}{(x+1)(2+x)^2} > 0$, 则 $f(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 上单调递增,

则 $f(\frac{1}{10}) > f(0) = 0$, 即 $\ln \frac{11}{10} - \frac{2}{21} > 0$, 即 $a > c$, 则 $b > a > c$.

或由对数平均不等式 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}$ 得 $\frac{\ln 11 - \ln 10}{11 - 10} > \frac{2}{11 + 10}$, 即 $\ln \frac{11}{10} > \frac{2}{21}$,

即 $a > c$.

二. 填空题

13. 1; 14. $\frac{4}{5}$; 15. $\sqrt{10}$ 或 $2\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{26}$ (三个任选一个); 16. 8.

16. 解析: 斐波那契数列: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

(特征: 每三项中前两项为奇数后一项为偶数)

由 $b_{n+3} + (-1)^n b_n = n$ 得: $b_4 - b_1 = 1$, $b_5 - b_2 = 2$, $b_6 + b_3 = 3$,

则 $b_1 + b_2 + b_4 + b_5 = 3 + 2(b_1 + b_2)$,

同理: $b_7 - b_4 = 4$, $b_8 - b_5 = 5$, $b_{10} - b_7 = 7$, $b_{11} - b_8 = 8$, $b_{12} + b_9 = 9$,

得: $b_7 = 5 + b_1$, $b_8 = 7 + b_2$, $b_{10} = 12 + b_1$, $b_{11} = 15 + b_2$,

则 $b_7 + b_8 + b_{10} + b_{11} = 39 + 2(b_1 + b_2)$, $b_3 + b_6 + b_9 + b_{12} = 12$,

则 $s_{12} = b_1 + b_2 + \dots + b_{12} = 54 + 4(b_1 + b_2) = 86$, 则 $b_1 + b_2 = 8$.

三. 解答题

17. 解: (1) 由 $\cos B + \sin(\frac{A+C}{2}) = 0$,

由内角和定理得: $\cos B + \cos \frac{B}{2} = 0$ 1 分

进而得: $2\cos^2 \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} - 1 = 0$ 2 分

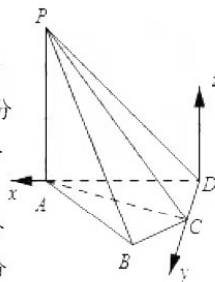
解得: $\cos \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{B}{2} = -1$ (舍去)4 分

从而得 $\frac{B}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow B = \frac{2\pi}{3}$ 6 分

赣州市 2022 ~ 2023 学年度第一学期期末考试高三理科数学参考答案 1

(2) 由题设知 $c:a=5:3$, 不妨设 $c=5x, a=3x$ 7 分
由余弦定理得: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 49x^2 = 49$ 8 分
联立解得: $x=1$ 9 分
即 $a=3, c=5, b=7$ 10 分
故 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{15\sqrt{3}}{4}$, 从而 $\triangle ABC$ 的面积 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ 12 分

18. 解: (1) 连接 AC , 由题设 $AB=AD=3, CB=CD=\sqrt{3}$,
得 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ 1 分
又 $\angle BAD=60^\circ$, 故 $\angle BAC=30^\circ$, 由余弦定理可得 $AC=2\sqrt{3}$ 2 分
从而有 $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow BC \perp AB$ 3 分
又 $PA \perp$ 面 $ABCD$ 且 $BC \subseteq$ 面 $ABCD$, 得 $PA \perp BC$ 4 分
 $PA \cap AB = A$, 故 $BC \perp$ 面 PAB 5 分
又 $BC \subseteq$ 面 PBC , 所以面 $PAB \perp$ 面 PBC 6 分



(2) 法一: 由 (1) 同理可得 $CD \perp$ 面 PAD ,
以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}$ 分别为 x, y 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,
则 $D(0,0,0), A(3,0,0), C(0,\sqrt{3},0), B(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0), P(3,0,3), \overrightarrow{CB} = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ 7 分

由 (1) 知 $BC \perp$ 面 PAB , 故面 PAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{CB} = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ 8 分

设面 PCD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

由 $\overrightarrow{DC} = (0, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{DP} = (3, 0, 3)$,

结合 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = \sqrt{3}y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 3x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0, \text{ 令 } x = 1, \text{ 得 } z = -1$ 9 分

故面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 0, -1)$ 10 分
记平面 PAB 与平面 PCD 夹角为 θ ,

则有 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{CB} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{CB}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ 12 分

(注: 取 PD 的中点 E , 连接 AE , 易证 $AE \perp$ 面 PCD , 则 $\overrightarrow{AE}$ 为平面 PCD 的一个法向量)

法二: 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}$ 分别为 y, z 轴的正方向建系,

可得面 PAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{CB} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0)$, 面 PCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 1, 1)$

19. 证: (1) 由题设知: $P(\xi=0) = \frac{C_3^1 \cdot C_3^1}{A_4^1} = \frac{9}{24}$ 4 分

(2) ξ 的所有可能取值为 $0, 1, 2, 3, 5$ 5 分

$$P(\xi=5) = \frac{1}{A_5^5} = \frac{1}{120} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$P(\xi=3) = \frac{C_5^3}{A_5^5} = \frac{1}{12} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$P(\xi=2) = \frac{C_5^2 C_3^1}{A_5^5} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(\xi=1) = \frac{C_5^1 C_3^1 C_2^1}{A_5^5} = \frac{3}{8} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$P(\xi=0) = \frac{C_5^1 (C_3^1 C_2^1 + C_2^1)}{A_5^5} = \frac{11}{30} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	5
P	$\frac{11}{30}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{120}$

$\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{故 } \xi \text{ 的数学期望为 } E\xi = 0 \times \frac{11}{30} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{120} = 1 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1)
$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) $\because$ 直线 l_1 与 l_2 的斜率之和为 0, 令直线 l_1 的斜率为 k , 则直线 l_2 的斜率为 $-k$,

令 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 l_1 的方程为 $y = k(x-1) + 2$,

$$\begin{cases} y = k(x-1) + 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow (4k^2 + 3)x^2 - (8k^2 - 16k)x + 4k^2 - 16k + 4 = 0 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2 - 16k}{4k^2 + 3}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 16k + 4}{4k^2 + 3} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

则直线 l_2 的斜率为 $-k$, 令 $M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$,

$$\text{同理: } x_3 + x_4 = \frac{8k^2 + 16k}{4k^2 + 3}, \quad x_3 \cdot x_4 = \frac{4k^2 + 16k + 4}{4k^2 + 3} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$|PA| \cdot |PB| = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 2)^2},$$

$$y_1 = k(x_1 - 1) + 2, \quad y_2 = k(x_2 - 1) + 2,$$

$$|PA| \cdot |PB| = \sqrt{(k^2 + 1)(x_1 - 1)^2} \cdot \sqrt{(k^2 + 1)(x_2 - 1)^2} = (k^2 + 1)|(x_1 - 1)(x_2 - 1)|$$

$$= (k^2 + 1) |x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1| = \frac{7(k^2 + 1)}{4k^2 + 3} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{同理: } |PC| \cdot |PD| = \sqrt{(k^2 + 1)(x_3 - 1)^2} \cdot \sqrt{(k^2 + 1)(x_4 - 1)^2} = (k^2 + 1) |(x_3 - 1)(x_4 - 1)|$$

$$= (k^2 + 1) |x_3 x_4 - (x_3 + x_4) + 1| = \frac{7(k^2 + 1)}{4k^2 + 3} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$|PA| \cdot |PB| = |PM| \cdot |PN|, \text{ 所以存在实数 } \lambda = 1 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

方法二 (2) $\because$ 直线 l_1 与 l_2 的斜率之和为 0, 令直线 l_1 的倾斜角为 α , 则直线 l_2 的斜率为倾斜角为 $\pi - \alpha$ $\dots\dots\dots 5$ 分

$$\text{令直线 } l_1 \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 得: } 3(1 + t \cos \alpha)^2 + 4(2 + t \sin \alpha)^2 = 12$$

$$\text{即 } (3 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha) t^2 + (6 \cos \alpha + 16 \sin \alpha) t + 7 = 0 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{令点 } A, B \text{ 对应的参数分别为 } t_1, t_2, \text{ 则 } t_1 t_2 = \frac{7}{3 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = \frac{7}{3 + \sin^2 \alpha},$$

$$\text{则 } |PA| \cdot |PB| = |t_1| |t_2| = \frac{7}{3 + \sin^2 \alpha} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{同理: 令直线 } l_2 \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 1 + t \cos(\pi - \alpha) = 1 - t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin(\pi - \alpha) = 2 + t \sin \alpha \end{cases}, \quad (t \text{ 为参数})$$

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 得: } 3(1 - t \cos \alpha)^2 + 4(2 + t \sin \alpha)^2 = 12$$

$$\text{即 } (3 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha) t^2 + (16 \sin \alpha - 6 \cos \alpha) t + 7 = 0$$

$$\text{令点 } M, N \text{ 对应的参数分别为 } t_3, t_4, \text{ 则 } t_3 t_4 = \frac{7}{3 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = \frac{7}{3 + \sin^2 \alpha} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{则 } |PM| \cdot |PN| = |t_3| |t_4| = \frac{7}{3 + \sin^2 \alpha} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{则 } |PA| \cdot |PB| = |PM| \cdot |PN|, \text{ 所以存在实数 } \lambda = 1 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. \text{ 解: (1) 由 } f(x) = e^x + mx^3 + nx^2 - x - 1, \text{ 得 } f'(x) = e^x + 3mx^2 + 2nx - 1 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{由题意知: } \begin{cases} f(1) = e + m + n - 1 - 1 = e \\ f'(1) = e + 3m + 2n - 1 = e \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = 5 \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 记 } g(x) = f(x) + ex^3 - 2ex^2 = e^x + (e - 3)x^3 - (2e - 5)x^2 - x - 1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{则 } g'(x) = e^x + 3(e - 3)x^2 - 2(2e - 5)x - 1$$

$$\text{记 } h(x) = g'(x) \Rightarrow h'(x) = e^x + 6(e - 3)x - 2(2e - 5)$$

$$\text{记 } m(x) = h'(x) \Rightarrow m'(x) = e^x + 6(e - 3) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

显然 $m'(x) = e^x + 6(e - 3)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增,

赣州市 2022 ~ 2023 学年度第一学期期末考试高三理科数学参考答案 4

且当 $x \in (-\infty, \ln 6(3-e))$ 时, $m'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln 6(3-e), +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$;

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty, \ln 6(3-e))$ 上递减, 在 $(\ln 6(3-e), +\infty)$ 上递增,

故 $h'(x)_{\min} = h'(\ln 6(3-e)) = 6(3-e) - 6(3-e) \ln 6(3-e) - 2(2e-5) < 0$ 7 分

(注: 这里的符号也可以通过 $h'(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}} + 1 - e < 0$ 来说明.)

又 $h'(0) = 11 - 4e > 0$, $h'(1) = 3e - 8 > 0$

故存在唯一 $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$, $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $h'(x) = 0$ 8 分

故当 $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $h'(x) < 0$;

即 $g'(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 与 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减9 分

且 $g'(0) = 0$, $g'(1) = 0$, 故存在唯一 $x_3 \in (x_1, x_2)$, 使 $g'(x_3) = 0$ 10 分

故当 $x \in (-\infty, 0) \cup (x_3, 1)$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (0, x_3) \cup (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 与 $(x_3, 1)$ 单调递减, 在 $(0, x_3)$ 与 $(1, +\infty)$ 上递增11 分

故 $g(x)_{\min}$ 是 $g(0)$ 与 $g(1)$ 中的较小值, 又 $g(0) = 0$ 且 $g(1) = 0$,

故 $g(x) \geq 0$ 恒成立. 证毕12 分

22. 解: (1) 直线 l 的普通方程为 $x - y - 1 = 0$ 2 分

由 $\rho = 2\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 得 $\rho = 2 \cos \theta + 2 \sin \theta$, 则 $\rho^2 = 2\rho \cos \theta + 2\rho \sin \theta$

曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ 5 分

(2) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)6 分

设点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 ,

将 $\begin{cases} x = 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ 代入 $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ 得 $t^2 + 5\sqrt{2}t + 11 = 0$ 7 分

则 $t_1 + t_2 = -5\sqrt{2}$, $t_1 t_2 = 11$, 则 $t_1 < 0, t_2 < 0$ 8 分

则 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{-(t_1 + t_2)}{t_1 t_2} = \frac{5\sqrt{2}}{11}$ 10 分

23. 解: (1) 由题意得 $f(x) = 2|x+1| + |x+2| = \begin{cases} -3x-4, & x \leq -2 \\ -x, & -2 < x \leq -1 \\ 3x+4, & x > -1 \end{cases}$ 3 分

从而函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上递增4 分

故 $f(x)_{\min} = f(-1) = 1$, 即 $m = 1$ 5 分

(2) 由 (1) 知: $a + b + c = 1$, 又 a, b, c 为正数,

赣州市 2022 ~ 2023 学年度第一学期期末考试高三理科数学参考答案 5

由 $a^2 + b^2 \geq 2ab, a^2 + c^2 \geq 2ac, b^2 + c^2 \geq 2bc$ 6 分

法一: $\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{b^2 + c^2}{a} \geq \frac{2ab}{c} + \frac{2ac}{b} + \frac{2bc}{a}$ 7 分

而 $\frac{2ab}{c} + \frac{2ac}{b} + \frac{2bc}{a} = a(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}) + b(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}) + c(\frac{b}{a} + \frac{a}{b})$ 8 分

所以 $\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{b^2 + c^2}{a} \geq 2(a + b + c) = 2$ 10 分

法二: 由 $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \frac{b^2}{a} + a \geq 2b, \frac{a^2}{c} + c \geq 2a$,

$\frac{c^2}{a} + a \geq 2c, \frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \frac{c^2}{b} + b \geq 2c$ 8 分

得 $\frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{b^2 + c^2}{a} \geq 2(a + b + c) = 2$ 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线